



# TU Clausthal

Clausthal University of Technology

## **Robustheit der Freigabeprüfung mit wenigen Proben**

**C. Müller, R. Masendorf, A. Esderts**

Technical Report Series

Fac3-14-03



Faculty of  
Mathematics/Computer Science  
and Mechanical Engineering  
Clausthal University of Technology

## Impressum

Publisher: Fakultät für Mathematik/Informatik und Maschinenbau,  
Technische Universität Clausthal  
Leibnizstraße 32, 38678 Clausthal-Zellerfeld, Germany

Editor-in-chief: Alfons Esderts

Technical editor: Martina Wächter

Contact: [martina.waechter@tu-clausthal.de](mailto:martina.waechter@tu-clausthal.de)

URL: <http://www.fakultaet3.tu-clausthal.de/forschung/technical-reports/>

ISSN: 1869-8018

## The Faculty of Mathematics/Computer Science and Mechanical Engineering Review Board

Prof. Dr. Frank Endres

Prof. Dr. Alfons Esderts

Prof. Dr. Stefan Hartmann

apl. Prof. Dr. Günter Kemnitz

Prof. Dr. Armin Lohrengel

Prof. Dr. Norbert Müller

Prof. Dr. Hubert Schwarze

Prof. Dr. Volker Wesling

## Robustheit der Freigabepfung mit wenigen Proben

Christian Müller  
Rainer Masendorf  
Alfons Esderts

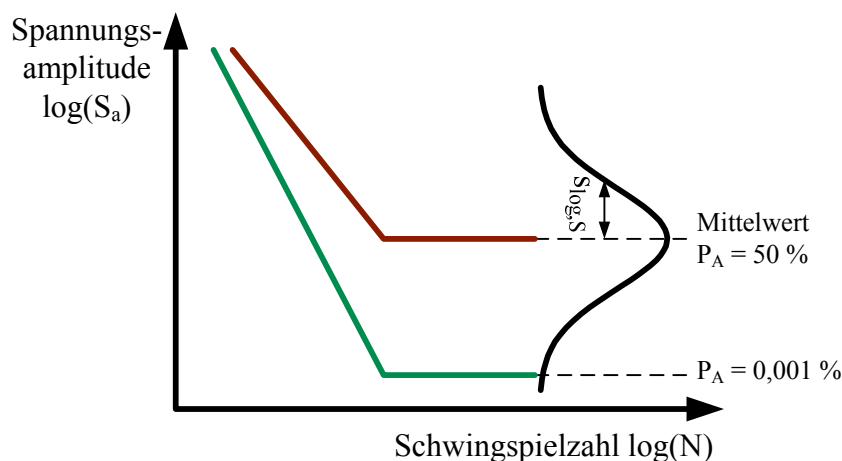
TU Clausthal – Institut für Maschinelle Anlagentechnik und Betriebsfestigkeit  
Leibnizstraße 32  
D-38678 Clausthal-Zellerfeld  
+495323/72-2201

### Abstract

Approval tests become necessary if only few specimens are available and S-N-curves or Gassner curves are impossible to determine. During approval tests specimens are tested with higher loads or with an extended amount of cycles compared to service conditions. The results of approval tests are maximum failure probabilities. In order to plan and evaluate approval tests precise knowledge of the deviation of the assumed probability function is necessary. The predicted maximum failure probability is quite sensitive to the assumed deviation. Assuming a logarithmic normal distribution, examples are given in order to demonstrate the possible risks. Despite the endurance limit is rather robust concerning small changes in the logarithmic standard deviation, the maximum-failure-probability is not at all.

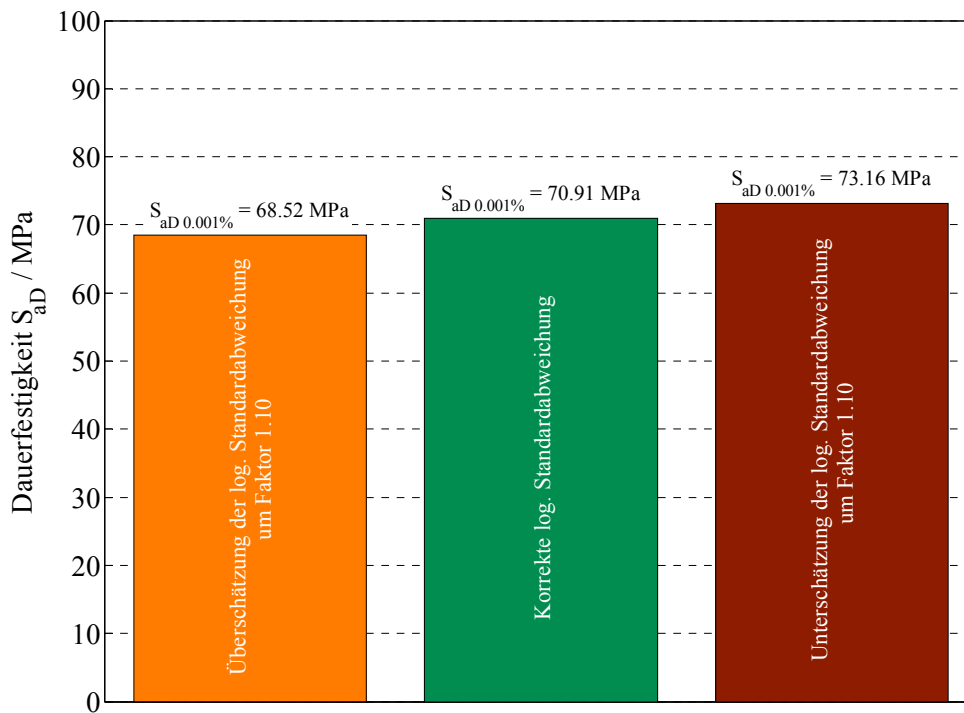
## 1 Einleitung

Mit Hilfe von Festigkeitsnachweisen werden Bauteile auf ihre Festigkeit gegenüber statischen und zyklischen Beanspruchungen überprüft und nach wirtschaftlichen Gesichtspunkten optimiert, [Haib 06]. In einem Festigkeitsnachweis werden Beanspruchung und Festigkeit gegenübergestellt. Bei zyklisch beanspruchten Bauteilen ist neben einer sicheren Lastannahme in der Regel die Kenntnis der Wöhlerlinie erforderlich, die vorzugsweise experimentell bestimmt wird. Wöhlerlinien geben den Zusammenhang zwischen konstanter Beanspruchungsamplitude und ertragbarer Schwingspielzahl wieder. Um eine experimentelle Wöhlerlinie zu ermitteln ist eine große Anzahl an Prüfkörpern erforderlich. Die Auswertung des Wöhlerversuchs liefert z.B. den Verlauf der Wöhlerlinie für eine mittlere Ausfallwahrscheinlichkeit von  $P_A = 50\%$  und die zugehörigen Standardabweichungen, [Mart 11a] und [Mart 11b]. Unter Annahme einer logarithmischen Normalverteilung kann mit dem Mittelwert und der Standardabweichung der logarithmierten Merkmalswerte (=logarithmische Standardabweichung  $s_{\log,S}$ ) eine Umrechnung der Wöhlerlinie auf beliebige Ausfallwahrscheinlichkeiten erfolgen, **Abbildung 1**.



**Abbildung 1:** Wöhlerlinien für unterschiedliche Ausfallwahrscheinlichkeiten  $P_A$  (schematisch)

Als Beispiel sei die Umrechnung einer mittleren Dauerfestigkeit von  $S_{aD 50\%} = 100\text{ MPa}$  auf eine Ausfallwahrscheinlichkeit von  $P_A = 10^{-5} = 0,001\%$  betrachtet. Die logarithmische Standardabweichung in Lastrichtung soll einen in der Betriebsfestigkeit üblichen Wert von  $s_{\log,S} = 0,035$  betragen, [Aden 01]. **Abbildung 2** zeigt die Auswirkungen einer Über- und Unterschätzung der logarithmischen Standardabweichung um den Faktor 1,10 auf die berechneten Dauerfestigkeiten. **Abbildung 2** ist zu entnehmen, dass der Fehler im betrachteten Beispiel vernachlässigbar ist. Bei einer Fehleinschätzung der Standardabweichung um 10% wird die Dauerfestigkeit bei einer kleinen Ausfallwahrscheinlichkeit von 0,001% nur etwa um 3,5% falsch eingeschätzt.



**Abbildung 2:** Einfluss einer Über- und Unterschätzung der logarithmischen Standardabweichung auf die berechnete Dauerfestigkeit für eine Ausfallwahrscheinlichkeit von  $P_A = 10^{-5} = 0,001 \%$  ( $S_{aD 50\%} = 100 \text{ MPa}$ ,  $S_{\log,S} = 0,035$ )

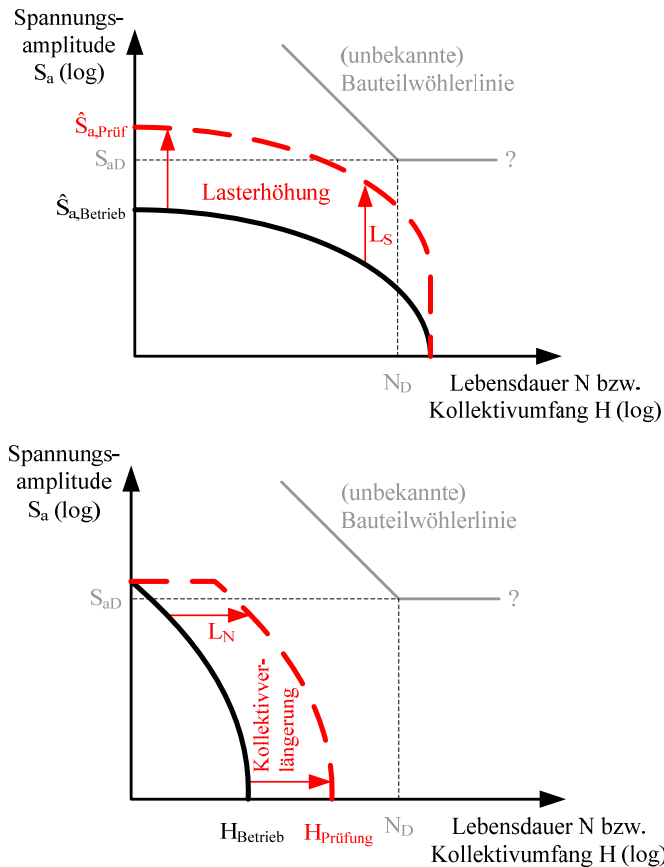
Die zur Ermittlung einer Wöhlerlinie nötige, große Probenanzahl steht oftmals nicht zur Verfügung. Sind nur sehr wenige Proben (z.B. fünf oder weniger) vorhanden, muss ein anderer Weg des Nachweises gegangen werden, um das Bauteil freizugeben.

Eine Möglichkeit zur Bauteilfreigabe mit wenigen Proben ist die Durchführung einer Freigabeprüfung mit erhöhter Last oder erhöhtem Prüfumfang (Schwingspielzahl), [Liu 01] und [Müll 12]. In der Planung und Auswertung einer Freigabeprüfung mit wenigen Proben ist eine Kennzahl nötig, die das Streuverhalten in Last- oder Lebensdauerichtung beschreibt. Dies ist z.B. für die logarithmische Normalverteilung die logarithmische Standardabweichung, [Liu 01], oder für die Weibullverteilung der Formparameter, [Müll 12]. Diese Werte müssen auf der Basis vorliegender Erfahrungen abgeschätzt oder der Literatur, z.B. [Aden 01] oder [Trau 04], entnommen werden.

Der vorliegende Beitrag soll die Auswirkungen aufzeigen, die bei Verwendung einer unzutreffenden, logarithmischen Standardabweichung im Zusammenhang mit der Freigabeprüfung mit wenigen Proben, entstehen können. Bei gleicher Fehleinschätzung der logarithmischen Standardabweichung wie im Beispiel aus **Abbildung 2** kann sich ein erheblicher Fehler in der vorausgesagten Ausfallwahrscheinlichkeit ergeben.

## 2 Freigabeprüfung mit wenigen Proben

Freigabeprüfungen mit wenigen Proben können sowohl mit erhöhter Last als auch mit erhöhtem Prüfumfang (längeres Kollektiv) durchgeführt werden, **Abbildung 3**. Bei Prüfung mit erhöhter Last wird das Bemessungskollektiv (Betriebslast) mit einem Lasterhöhungsfaktor  $L_S$  in Lastrichtung multipliziert wodurch sich das Prüfkollektiv ergibt, **Abbildung 3 oben**. Durch Multiplikation des Bemessungskollektivs mit einem Lebensdauererhöhungsfaktor  $L_N$  in Schwingspielzahlrichtung wird das Prüfkollektiv für eine Prüfung unter erhöhtem Prüfumfang bestimmt, **Abbildung 3 unten**.



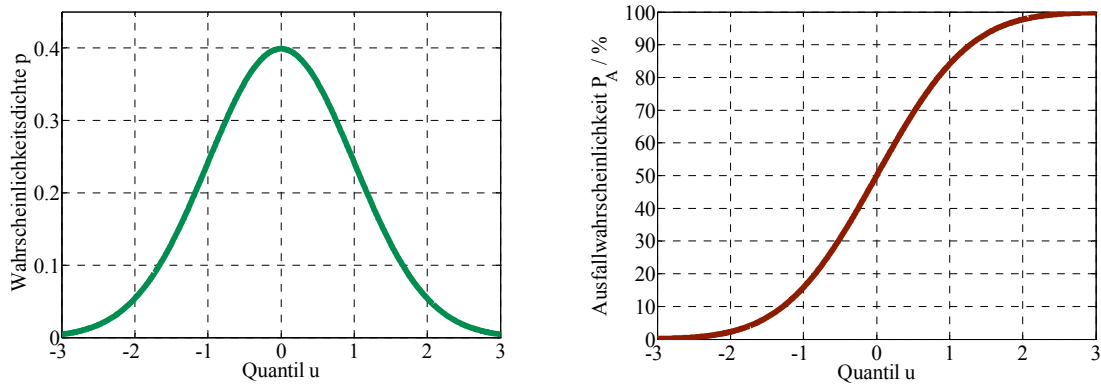
**Abbildung 3:** Freigabeprüfung mit erhöhter Last (oben) und erhöhtem Prüfumfang (unten)

Mit dem jeweiligen Prüfkollektiv werden die Bauteile beansprucht, bis sie die gewünschte Zyklenzahl erreicht haben (Durchläufer) oder ausfallen (z.B. Bruch). Die nachfolgende Auswertung ist prinzipiell für Lasterhöhung und Prüfumfangerhöhung gleich. Daher wird im Folgenden nur noch die Lasterhöhung betrachtet. Weiterhin wird nur der in der Betriebsfestigkeit wichtigste Fall einer logarithmischen Normalverteilung, [Buxb 92], untersucht.

Jede logarithmische Normalverteilung mit Mittelwert  $S_{a,50\%}$  und logarithmischer Standardabweichung  $s_{\log,S}$  kann in die Standardnormalverteilung mit Mittelwert  $\mu = 0$  und Standardabweichung  $\sigma = 1$  überführt werden, [Fahr 07]. Dabei ist  $u$  das Quantil (Merkmal) der Standardnormalverteilung.

$$u = \frac{\log S_a - \log S_{a,50\%}}{s_{\log,S}} \quad (1)$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $p(u)$  und die Wahrscheinlichkeitsfunktion  $P(u)$  der Standardnormalverteilung sind in **Abbildung 4** dargestellt. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $p(u)$  charakterisiert die Art der Verteilung der Merkmale (hier die Festigkeit), **Abbildung 4 links**. Sie ist ähnlich einem Histogramm. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion hingegen gibt den Zusammenhang zwischen Merkmal (Festigkeit) und zugehöriger Ausfallwahrscheinlichkeit  $P_A$  an, **Abbildung 4 rechts**. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion wird durch Integration der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion erhalten.



**Abbildung 4:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (links) und Wahrscheinlichkeitsfunktion (rechts) der Standardnormalverteilung

Eine Probe kann während einer Freigabeprüfung ausfallen oder durchlaufen. Das Prüfergebn ( $r$  Ausfälle bei  $n$  geprüften Bauteilen) folgt damit einer Binomialverteilung, da außer diesen beiden Optionen keine dritte möglich ist. Im Extremfall existieren in einer Prüfung nur Ausfälle oder nur Durchläufer. Mit Hilfe der inversen Fisherverteilung  $F$  lässt sich aus dem Prüfergebn die Höchstausfallwahrscheinlichkeit  $P_{APmax}$  der Prüfung abschätzen, **Abbildung 5**, [Stan 70].

$$P_{APmax} = \frac{(r+1) \cdot F_{f_1, f_2, P_V}}{n - r + (r+1) \cdot F_{f_1, f_2, P_V}} \quad (2)$$

Dazu muss eine Vertrauenswahrscheinlichkeit  $P_V$  vorgegeben werden, die ein Maß für die Sicherheit des berechneten Ergebnisses ist. Eine übliche Vertrauenswahrscheinlichkeit von z.B.  $P_V = 90\%$  bedeutet, dass nach Durchführung und Auswertung von 100 Freigabeprüfungen zehn ein Ergebnis auf der unsicheren Seite vorausgesagt haben. Die Größen  $f_1$  und  $f_2$  sind die Freiheitsgrade der inversen Fisherverteilungsfunktion  $F$ .

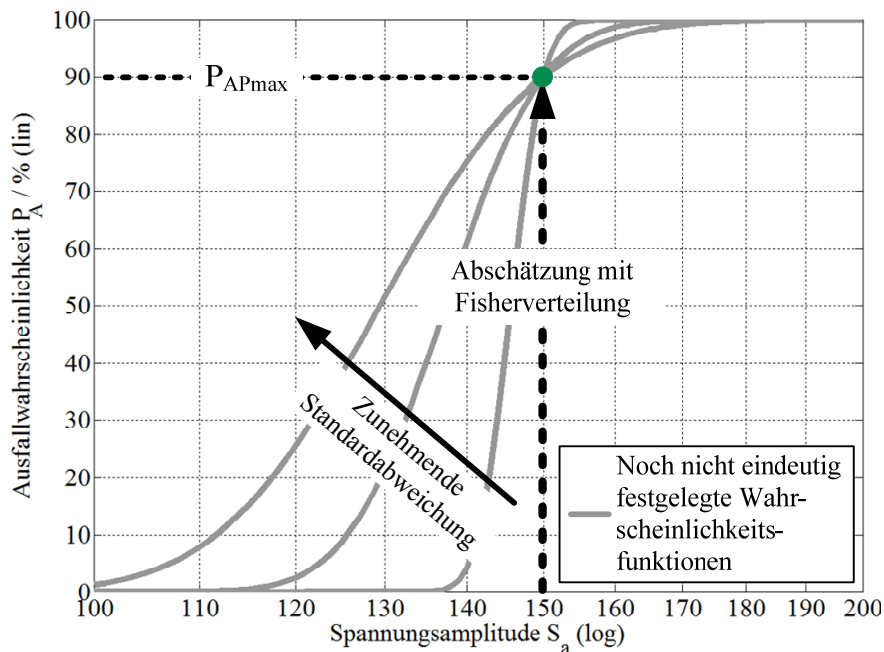
$$f_1 = 2 \cdot (r+1) \quad (3)$$

$$f_2 = 2 \cdot (n-r) \quad (4)$$

Die Funktionswerte der inversen Fisherverteilungsfunktion  $F$  können aus Tabellenwerken abgelesen oder mit Hilfe von MS Excel ( $F.inv$ ) oder MatLab ( $finv$ ) berechnet werden. **Tabelle 1** gibt einen Überblick über Funktionswerte der inversen Fisherverteilungsfunktion für eine Vertrauenswahrscheinlichkeit von  $P_V = 90\%$ . Neben der Abschätzung der Höchstausfallwahrscheinlichkeit  $P_{APmax}$  für das Prüfergebn wird die Fisherverteilung häufig für Testverfahren der Regressions- und Varianzanalyse benötigt, [Fahr 07].

		Freiheitsgrad $f_2$									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Freiheitsgrad $f_1$	1	39,863	8,526	5,538	4,545	4,060	3,776	3,589	3,458	3,360	3,285
	2	49,500	9,000	5,462	4,325	3,780	3,463	3,257	3,113	3,006	2,924
	3	53,593	9,162	5,391	4,191	3,619	3,289	3,074	2,924	2,813	2,728
	4	55,833	9,243	5,343	4,107	3,520	3,181	2,961	2,806	2,693	2,605
	5	57,240	9,293	5,309	4,051	3,453	3,108	2,883	2,726	2,611	2,522
	6	58,204	9,326	5,285	4,010	3,405	3,055	2,827	2,668	2,551	2,461
	7	58,906	9,349	5,266	3,979	3,368	3,014	2,785	2,624	2,505	2,414
	8	59,439	9,367	5,252	3,955	3,339	2,983	2,752	2,589	2,469	2,377
	9	59,858	9,381	5,240	3,936	3,316	2,958	2,725	2,561	2,440	2,347
	10	60,195	9,392	5,230	3,920	3,297	2,937	2,703	2,538	2,416	2,323

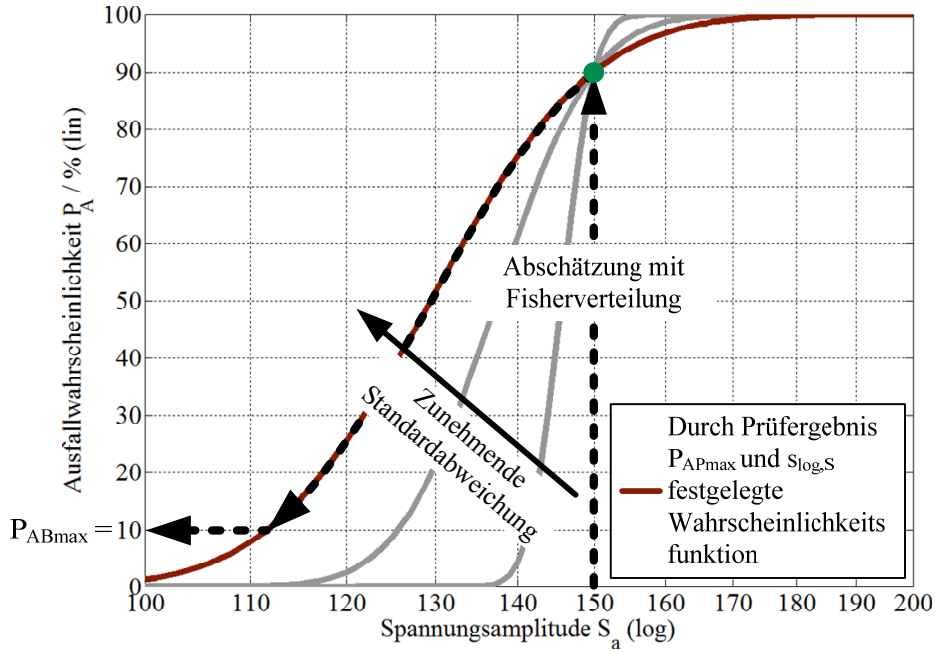
**Tabelle 1:** Ausgewählte Funktionswerte der inversen Fisherverteilungsfunktion für eine Vertrauenswahrscheinlichkeit von  $P_V = 90\%$



**Abbildung 5:** Festlegung eines Punktes auf der Wahrscheinlichkeitsfunktion durch das Prüfergebnis

Die abgeschätzte Höchstausfallwahrscheinlichkeit  $P_{APmax}$  der Prüfung definiert einen Punkt auf der unterstellten Wahrscheinlichkeitsfunktion des Bauteils, **Abbildung 5**. Mit der aus Erfahrungen oder der Literatur bekannten logarithmischen Festigkeitsstandardabweichung  $s_{log,S}$  ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion vollständig beschrieben, **Abbildung 6**. Mit dem für die Versuche verwendeten Lasterhöhungsfaktor  $L_S$  wird die Höchstausfallwahrscheinlichkeit  $P_{ABmax}$  im Betrieb berechnet, **Abbildung 6**. Die Höchstausfallwahrscheinlichkeit  $P_{ABmax}$  ist bei gleichem Prüfergebnis umso kleiner, je größer der Lasterhöhungsfaktor  $L_S$  und je kleiner die logarithmische Standardabweichung  $s_{log,S}$  ist, **Abbildung 6**.





**Abbildung 6:** Ableitung der Höchstausfallwahrscheinlichkeit  $P_{ABmax}$  im Betrieb durch „runterlaufen“ der Wahrscheinlichkeitsfunktion um den Lasterhöhungsfaktor

Wären die beide Parameter Mittelwert  $S_{aD 50\%}$  und logarithmische Standardabweichung  $s_{log,S}$  der logarithmischen Normalverteilung bekannt, dann könnte die Höchstausfallwahrscheinlichkeit  $P_{APmax}$  der Prüfung auch mit Hilfe der Standardnormalverteilung  $\Phi$  berechnet werden.

$$P_{APmax} = \frac{(r+1) \cdot F_{f_1, f_2, P_V}}{n-r+(r+1) \cdot F_{f_1, f_2, P_V}} = \Phi \left( \frac{\log S_{a,Prüf} - \log S_{a 50\%}}{s_{log,S}} \right) \quad (5)$$

Das gleiche gilt auch für die Höchstausfallwahrscheinlichkeit  $P_{ABmax}$  im Betrieb.

$$P_{ABmax} = \Phi \left( \frac{\log S_{a,Betrieb} - \log S_{a 50\%}}{s_{log,S}} \right) \quad (6)$$

Gleichung ( 5 ) und Gleichung ( 6 ) lassen sich nach dem logarithmischen Mittelwert  $\log S_{a 50\%}$  auflösen. Dabei ist  $\Phi^{-1}$  die inverse der Standardnormalverteilungsfunktion. Sie weist einer Ausfallwahrscheinlichkeit  $P_A$  ein Quantil  $u$  zu.

$$\log S_{a 50\%} = \log S_{a,Prüf} - \Phi^{-1}(P_{APmax}) \cdot s_{log,S} \quad (7)$$

$$\log S_{a 50\%} = \log S_{a,Betrieb} - \Phi^{-1}(P_{ABmax}) \cdot s_{log,S} \quad (8)$$

Gleichsetzen von Gleichung ( 7 ) und Gleichung ( 8 ) mit anschließendem Auflösen nach der Höchstausfallwahrscheinlichkeit  $P_{ABmax}$  liefert den gesuchten Zusammenhang zwischen Prüfergebnis und der Höchstausfallwahrscheinlichkeit  $P_{ABmax}$  im Betrieb.

$$P_{ABmax} = \Phi \left( \Phi^{-1}(P_{APmax}) - \frac{\log \left( \frac{S_{a,Prüf}}{S_{a,Betrieb}} \right)}{s_{\log,S}} \right) = \Phi \left( \Phi^{-1}(P_{APmax}) - \frac{\log(L_S)}{s_{\log,S}} \right) \quad (9)$$

### 3 Einfluss unzutreffender, logarithmischer Standardabweichungen

Im vorangegangenen Kapitel wurde gezeigt, dass die berechnete Höchstausfallwahrscheinlichkeit  $P_{ABmax}$  im Betrieb von den folgenden Größen abhängt:

1. Stichprobenumfang  $n$
2. Anzahl an Ausfällen  $r$
3. Vertrauenswahrscheinlichkeit  $P_V$
4. Lasterhöhungsfaktor  $L_S$
5. Logarithmische Standardabweichung  $s_{\log,S}$

Alle denkbaren und sinnvollen Kombinationen dieser fünf Einflussparameter können hier nicht untersucht werden. Bei der Durchführung von Freigabeprüfungen mit wenigen Proben, sind die Parameter logarithmische Standardabweichung  $s_{\log,S}$  und Lasterhöhungsfaktor  $L_S$  in der Regel schwierig festzulegen, so dass sie im Folgenden betrachtet werden.

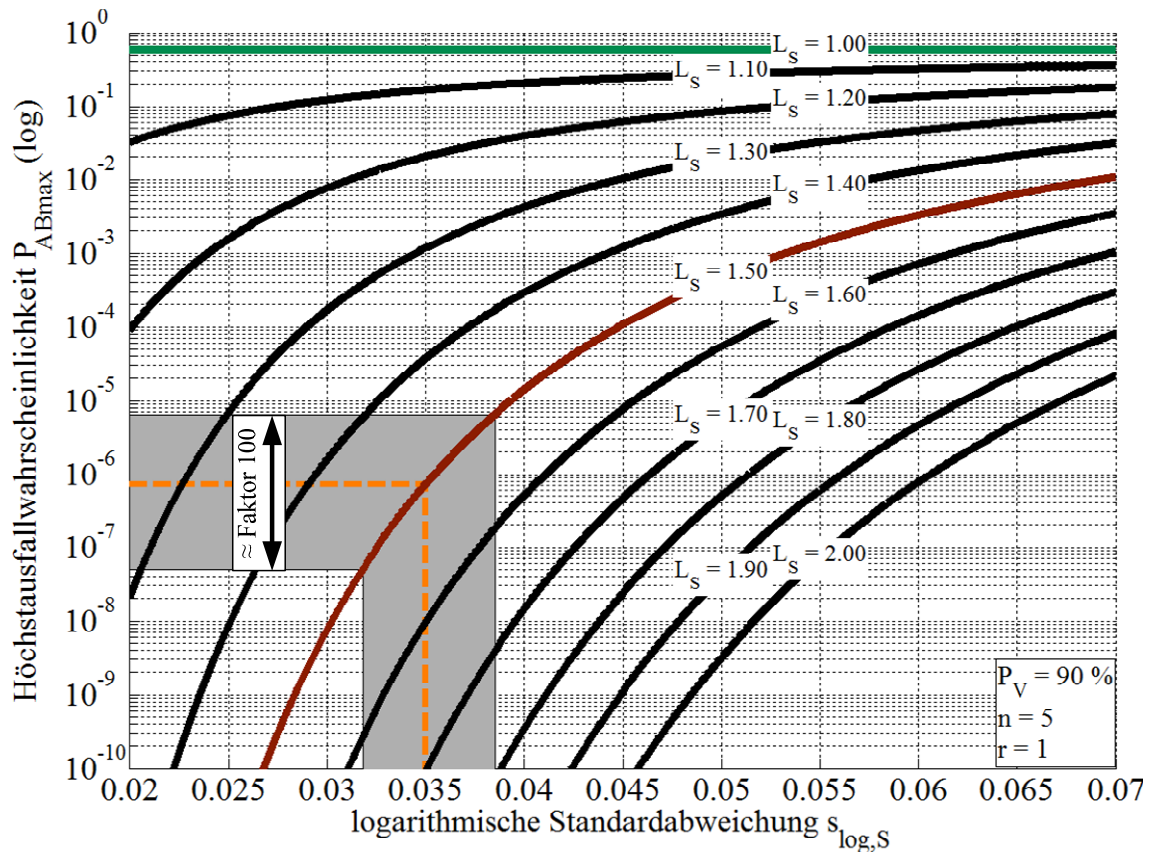
Bei der Wahl des Lasterhöhungsfaktors  $L_S$  muss ein Kompromiss zwischen möglichst niedriger Höchstausfallwahrscheinlichkeit  $P_{ABmax}$  im Betrieb ( $L_S$  groß) und möglichst geringer Anzahl an Ausfällen  $r$  ( $L_S$  klein) gefunden werden. Falls  $L_S$  zu groß gewählt wird, fallen alle Bauteile aus ( $r = n$ ,  $P_{APmax} = 100\%$ ). Damit ist keine Aussage über  $P_{ABmax}$  möglich.

Die Festsetzung der logarithmischen Standardabweichung  $s_{\log,S}$  kann selbst bei Vorliegen detaillierter Daten schwierig sein. **Tabelle 2** zeigt, dass für den Radsatzwellenwerkstoff A4T unterschiedliche, logarithmische Standardabweichungen gefunden wurden, die zwischen  $0,010 \leq s_{\log,S} \leq 0,089$  liegen.

Werkstoff	log. Standardabweichung $s_{\log,S}$
A4T	0,010
A4T	0,089
A4T	0,054
A4T	0,051
A4T	0,051
A4T	0,055

**Tabelle 2:** Logarithmische Standardabweichungen  $s_{\log,S}$  für den Radsatzwellenwerkstoff A4T, [Davi 11]

Im Folgenden werden Beispielrechnungen für eine übliche Vertrauenswahrscheinlichkeit von  $P_V = 90\%$  durchgeführt. Dabei liegt ein Stichprobenumfang von  $n = 5$  zu Grunde bei dem es zu einem Ausfall kommt ( $r = 1$ ). **Abbildung 7** zeigt die erreichbaren Höchstausfallwahrscheinlichkeiten  $P_{ABmax}$  für unterschiedliche Lasterhöhungsfaktoren  $L_S$  und logarithmische Standardabweichungen  $s_{\log,S}$ .



**Abbildung 7:** Erreichbare Höchstaussfallwahrscheinlichkeiten  $P_{ABmax}$  im Betrieb in Abhängigkeit des Lasterhöhungsfaktors  $L_S$  und der logarithmischen Standardabweichung  $s_{log,S}$

Die Linien gleicher Lasterhöhungsfaktoren  $L_S$  in **Abbildung 7** verlaufen umso steiler, je größer der Lasterhöhungsfaktor und je kleiner die logarithmische Standardabweichung ist. Im Bereich kleiner, logarithmischer Standardabweichungen hat folglich eine Fehleinschätzung gravierendere Folgen. Der Effekt wird durch einen zunehmenden Lasterhöhungsfaktor zusätzlich verstärkt. Die Verläufe aus **Abbildung 7** sind für andere Vertrauenswahrscheinlichkeiten und andere Prüfergebnisse ( $n$  und  $r$ ) qualitativ ähnlich. Die Folgen einer Fehleinschätzung der logarithmischen Standardabweichung sind umso ausgeprägter, je größer die Steigung der Kurven gleichen Lasterhöhungsfaktors ist, **Abbildung 7**. Die Kurven werden in den folgenden Fällen steiler (hier nicht weiter gezeigt):

- Größerer Lasterhöhungsfaktor  $L_S$
- Kleinere logarithmische Standardabweichung  $s_{log,S}$
- Kleinere Vertrauenswahrscheinlichkeit  $P_V$
- Größerer Stichprobenumfang  $n$  bei gleichem Verhältnis von Ausfällen zu Stichprobenumfang ( $r/n$ )
- Geringere Anzahl an Ausfällen  $r$  bei konstantem Stichprobenumfang  $n$

Im Beispiel aus **Abbildung 2** wurde eine logarithmische Standardabweichung von  $s_{log,S} = 0,035$  betrachtet, die um den Faktor 1,10 unter- bzw. überschätzt wurde. Diese beispielhafte Standardabweichung ist auch in **Abbildung 7** mit ihrer Unter- bzw. Überschätzung eingetragen. Die vergleichsweise kleine Fehleinschätzung um den Faktor

1,10 liefert circa um bis zu Faktor 100 unterschiedliche Höchstausfallwahrscheinlichkeiten  $P_{ABmax}$  im Betrieb, **Abbildung 7**.

#### 4 Zusammenfassung

Die Anwendung der Freigabeprüfung mit wenigen Proben ist auf die genaue Kenntnis von Streuparametern wie der logarithmischen Standardabweichung im Falle einer logarithmischen Normalverteilung angewiesen. Diese Werte können aus Erfahrungen oder Literatur bekannt sein. Bei unsicherer Kenntnis der Streuparameter darf die Freigabeprüfung nicht oder nur eingeschränkt verwendet werden. Eine geringe Fehleinschätzung des Streuparameters kann zu einer deutlich falsch abgeschätzten Höchstausfallwahrscheinlichkeit im Betrieb führen. Ist aus unterschiedlichen Untersuchungen für ein Bauteil oder einen Werkstoff ein Streuparameter in verschiedenen Größenordnungen bekannt (z.B.  $0,010 \leq s_{\log,S} \leq 0,089$ ), dann sollte der ungünstigste verwendet werden. Nur so lässt sich ein Ergebnis erzielen, dass in der Regel auf der sicheren Seite liegen wird.

## Literaturverzeichnis

- [Aden 01] R. Adenstedt  
Streuung der Schwingfestigkeit  
Dissertationsschrift, Clausthal-Zellerfeld, Papierflieger, 2001
- [Buxb 92] O. Buxbaum  
Sichere und wirtschaftliche Bemessung schwingbruchgefährdeter Bauteile  
2. Auflage, Düsseldorf, Stahleisen, 1992
- [Davi 11] P. David  
Beanspruchung von Radsatzwellen im Schienennahverkehr  
Dissertationsschrift, Clausthal-Zellerfeld, Papierflieger, 2011
- [Fahr 07] L. Fahrmeir, R. Künstler, I. Pigeot, G. Tutz  
Statistik  
6. Auflage, Berlin, Springer Verlag, 2007
- [Haib 06] E. Haibach  
Betriebsfestigkeit: Verfahren und Daten zur Bauteilberechnung  
3. Auflage, Berlin, Springer Verlag, 2006
- [Liu 01] J. Liu  
Dauerfestigkeitsberechnung metallischer Werkstoffe  
Habilitationsschrift, Clausthal-Zellerfeld, Papierflieger, 2001
- [Mart 11a] A. Martin, K. Hinkelmann, A. Esderts  
Zur Auswertung von Schwingfestigkeitsversuchen im Zeitfestigkeitsbereich  
– Teil 1  
Materials Testing, München, Hanser, 2011
- [Mart 11b] A. Martin, K. Hinkelmann, A. Esderts  
Zur Auswertung von Schwingfestigkeitsversuchen im Zeitfestigkeitsbereich  
– Teil 2  
Materials Testing, München, Hanser, 2011
- [Müll 12] C. Müller, R. Masendorf, A. Esderts  
Freigabepfung mit wenigen Proben weibullverteilter Kennwerte  
Technical Report, Clausthal-Zellerfeld, 2012
- [Stan 70] K. Stange  
Angewandte Statistik: Erster Teil Eindimensionale Probleme  
Berlin, Springer Verlag, 1970
- [Trau 04] M. Traupe, H. Meinen, H. Zenner  
Sichere und wirtschaftliche Auslegung von Eisenbahnfahrwerken – Band I  
Abschlussbericht, Clausthal-Zellerfeld, 2004