TU Clausthal
Clausthal University of Technology

Freigabeprüfung mit wenigen Proben weibullverteilter Kennwerte

Christian Müller, Rainer Masendorf, Alfons Esderts

Technical Report Series

Fac3-12-02

Faculty of
Mathematics/Computer Science
and Mechanical Engineering
Clausthal University of Technology

Impressum

Publisher: Fakultät für Mathematik/Informatik und Maschinenbau,
Technische Universität Clausthal
Leibnizstraße 32, 38678 Clausthal-Zellerfeld, Germany
Editor-in-chief: Alfons Esderts
Technical editor: Martina Wächter
Contact: martina.waechter@tu-clausthal.de
URL: http://www.fakultaet3.tu-clausthal.de/forschung/technical-reports/
ISSN: 1869-8018

The Faculty of Mathematics/Computer Science and Mechanical Engineering Review Board

Freigabeprüfung mit wenigen Proben weibullverteilter Kennwerte

Dipl.-Ing. Christian Müller
Dr.-Ing. Rainer Masendorf
Prof. Dr.-Ing. Alfons Esderts

TU Clausthal – Institut für Maschinelle Anlagentechnik und Betriebsfestigkeit
Leibnizstraße 32
D-38678 Clausthal-Zellerfeld
+495323/72-2201

Abstract

The estimation of fatigue life parameters is difficult or even impossible if just a few specimens are available. In this case the test engineer has the possibility to perform an approval test. In an approval test the specimens are tested with higher loads or with an extended amount of cycles then in operation. S-N-curve or Gassner's-curve stay undefined. With the help of an assumed probability function the maximum failure possibility in operation is estimated, based on the test results. In this paper the author gives an advice for analysing approval tests with Weibull-distributed parameters. Several examples are given of how to evaluate an approval test with Weibull-distributed parameters.

1 Einleitung

Zur Abschätzung von Bauteilfestigkeiten oder Bauteillebensdauern werden neben rechnerischen Nachweisen Versuche durchgeführt. Stehen für den Versuch ausreichend viele Proben zur Verfügung, so können die Zusammenhänge zwischen Festigkeit und Lebensdauer z.B. in Form einer Wöhlerlinie ermittelt werden. Bei geringem Stichprobenumfang ist dies nicht oder nur mit sehr großen Unsicherheiten möglich. Dem Anwender bietet sich dann die Möglichkeit, eine Freigabeprüfung durchzuführen, in der das Bauteil mit erhöhter Last oder unter erhöhter Schwingspielzahl (=erhöhter Kollektivumfang) geprüft wird. Eine Voraussetzung für Freigabeprüfungen ist die genaue Kenntnis der Betriebsbelastungen und die Möglichkeit, diese im Versuch exakt nachzufahren.

Versuchsergebnisse streuen in der Regel und unterliegen damit Verteilungsfunktionen [Haib 06]. In der Betriebsfestigkeit wird als Verteilungsfunktion häufig die logarithmische Normalverteilung angenommen [Buxb 92]. Hierfür ist in [Liu 01] die Auswertung von Freigabeprüfungen mit wenigen Proben dokumentiert.

Neben der logarithmischen Normalverteilung besitzt die Weibullverteilung in der Betriebsfestigkeit eine große Bedeutung [Weil 07]. Sie findet z.B. in der Wälzlagerlebensdauerberechnung [Seif 04] und der Grübchentragfähigkeitsberechnung von Zahnrädern [FVA 554-I] Anwendung. Die Unterschiede zwischen Weibull- und logarithmischer Normalverteilung sind im Bereich, der üblicherweise durch Experimente abgedeckt wird, gering. Erst bei der Extrapolation auf geringe Ausfallwahrscheinlichkeiten, die häufig für die Freigabe von Bauteilen gefordert werden (z.B. 0,1 ‰), unterscheiden sie sich [Haib 06].

Im folgenden Beitrag wird die Freigabeprüfung mit wenigen Proben für weibullverteilte Kennwerte formuliert.

2 Freigabeprüfung mit wenigen Proben

Aus Zeit- und Kostengründen stehen in der experimentellen Festigkeitsbeurteilung häufig nur geringe Stichprobenumfänge von fünf oder weniger zur Verfügung. Eine exakte Ermittlung der Festigkeitskennwerte ist in diesen Fällen i.d.R. nicht durchführbar. Die Bauteile werden daher zweckmäßig unter erhöhter Last oder erhöhtem Kollektivumfang geprüft [Liu 01] und [Weih 10], vgl. **Abbildung 1**. Für die Prüfung kann aus den Versuchsergebnissen die zugehörige Höchstausfallwahrscheinlichkeit P_{APmax} abgeschätzt werden. Mit Hilfe der unterstellten Verteilungsfunktion wird daraus die Höchstausfallwahrscheinlichkeit P_{ABmax} des Betriebspunkts abgeleitet. Die Bauteilwöhler- oder Bauteilgassnerlinie bleibt dabei unbekannt.

Eine wichtige Voraussetzung für die Anwendbarkeit von Freigabeprüfungen ist die genaue Kenntnis der im Betrieb vorherrschenden Belastungen und deren genaue Nachbildung im Versuch.

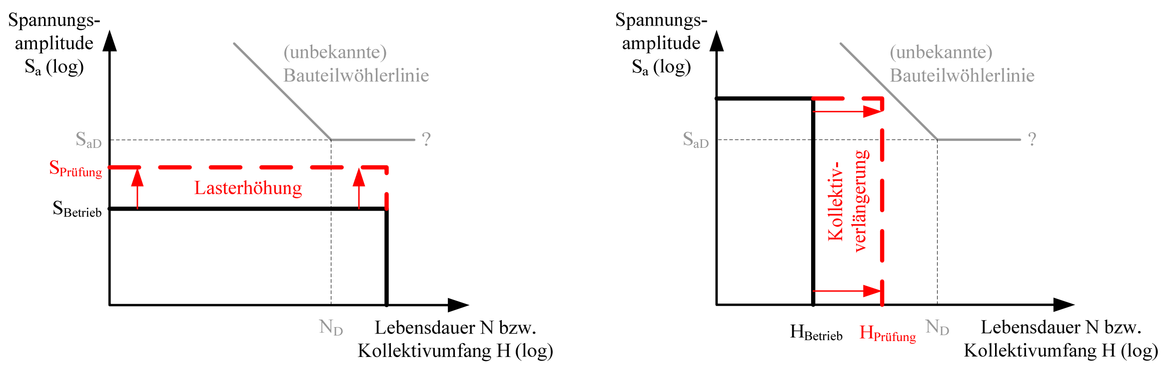

Abbildung 1: Freigabeprüfung mit erhöhter Last (links) und erhöhtem Kollektivumfang (rechts)

3 Die zweiparametrische Weibullverteilung

Die Weibullverteilung existiert in zwei- und dreiparametrischer Form. Im Folgenden wird die zweiparametrische Form verwendet, wie sie auch bei der Lebensdauerberechnung von Wälzlagern zugrunde gelegt wird [Seif 04]. Auch bei der Grübchenbildung an Zahnrädern findet die zweiparametrische Weibullverteilung Verwendung [FVA 554-I]. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die Anwendbarkeit der zweiparametrischen Weibullverteilung z.B. aus Erfahrungen bekannt sein muss.

Die zweiparametrische Weibullverteilung liefert für alle Ereignisse $t \leq 0$ eine Ausfallwahrscheinlichkeit $P_A = 0$ und für alle Ereignisse $t > 0$ eine Ausfallwahrscheinlichkeit $P_A > 0$. Dabei kann das Ereignis t für Schwingspiele, Überrollungen, Lebensdauern usw. stehen. Die Gleichung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion p(t) mit der charakteristischen Lebensdauer T und dem Formparameter b, die Lage und Form beschreiben, lautet:

$$p(t) = \frac{b}{T}\left(\frac{t}{T}\right)^{b-1} e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^{b}} \qquad (1)$$

Abbildung 2 links zeigt den Graphen der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion p(t) für eine charakteristische Lebensdauer T = 2 und einen Formparameter b = 2. Die charakteristische Lebensdauer T ist die Lebensdauer, nach der 63,21 % aller Bauteile ausgefallen sind. Sie ist vergleichbar mit dem Erwartungswert μ der Normalverteilung [Haib 06]. Eine Veränderung der charakteristischen Lebensdauer T führt zu einer Parallelverschiebung der Geraden im Weibullwahrscheinlichkeitspapier, **Abbildung 3**. Der Formparameter b ist der Standardabweichung σ der Normalverteilung ähnlich [Haib 06], und damit ein Maß für die Streuung der Versuchsergebnisse. Er ist die Steigung der Geraden im Weibullwahrscheinlichkeitspapier. Ein kleiner Formparameter b repräsentiert damit eine große Streuung, vgl. **Abbildung 3**. Ein Formparameter von b = 2 bedeutet, dass zwischen den Lebensdauern eines Bauteils mit einer Ausfallwahrscheinlichkeit von $P_A = 1\ \%$ und $P_A = 63{,}21\ \%$ eine Dekade (=Faktor 10) liegt, **Abbildung 3**.

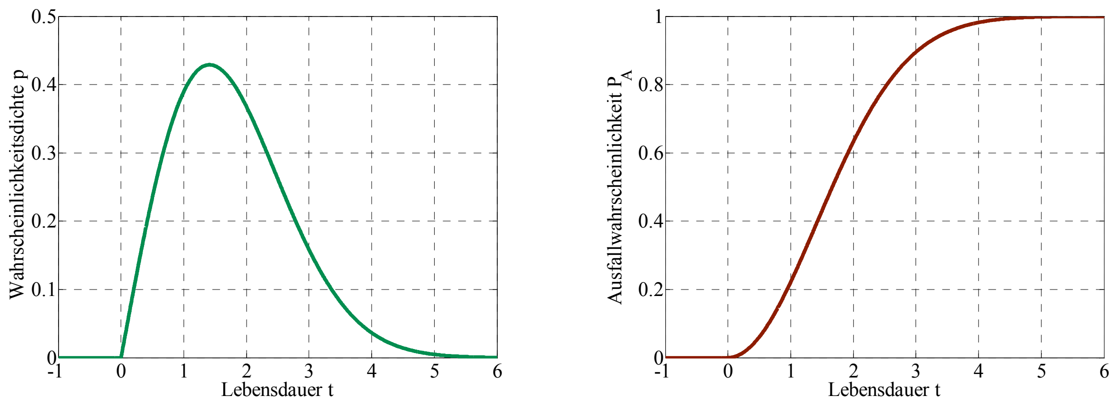

Abbildung 2: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion p(t) (links) und Wahrscheinlichkeitsfunktion $P_A(t)$ (rechts) der Weibullverteilung, T = b = 2

Durch Integration von Gleichung (1) ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsfunktion $P_A(t)$, **Abbildung 2 rechts**, die den Zusammenhang zwischen Lebensdauer t und der zugehörigen Ausfallwahrscheinlichkeit P_A darstellt.

$$P_A(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b} \qquad (2)$$

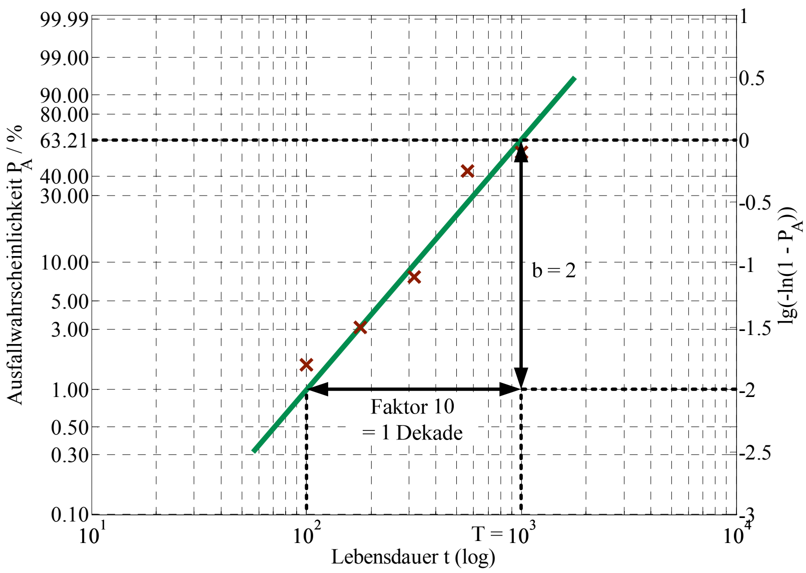

Abbildung 3: Ablesen der charakteristischen Lebensdauer T und des Formparameters b im Weibullwahrscheinlichkeitspapier

4 Freigabeprüfung weibullverteilter Kennwerte

Bei einer Freigabeprüfung mit wenigen Proben werden Versuche mit erhöhter Last oder erhöhtem Kollektivumfang durchgeführt. Bei der Wahl der Prüfstrategie ist zu beachten, dass sich insbesondere bei Prüfungen mit erhöhter Last die Lage des Schadensorts ändern kann. Für den Betrieb der Bauteile haben die Versuchsergebnisse dann keine Relevanz.

Im Folgenden wird nur die Prüfung unter erhöhtem Kollektivumfang betrachtet. Die Ausführungen gelten jedoch auch für die Prüfung mit erhöhter Last. Für die Prüfung mit erhöhtem Kollektivumfang wird ein Lebensdauerverlängerungsfaktor L_N definiert, der das Verhältnis aus angestrebter Prüflebensdauer t_P und geforderter Betriebslebensdauer t_B darstellt:

$$L_N = \frac{t_P}{t_B} \tag{3}$$

Jede Probe kann die Prüfung ohne Schaden überstehen (t_P wird erreicht) oder aber versagen (t_P wird nicht erreicht). Im Extremfall werden nur Brüche oder nur Durchläufer erhalten. Das Prüfergebnis unterliegt damit einer Binomialverteilung. Für die Prüflebensdauer kann folglich unter Annahme einer Vertrauenswahrscheinlichkeit P_V eine obere Grenze der Ausfallwahrscheinlichkeit P_{APmax} abgeschätzt werden [Hart 09] und [Stan 70], vgl. **Abbildung 4**.

$$P_{AP\max} = \frac{(r+1) \cdot F_{f_1,f_2,P_V}}{n - r + (r+1) \cdot F_{f_1,f_2,P_V}} \tag{4}$$

Dabei stellt r die Anzahl der Brüche und n den Stichprobenumfang dar. F ist die inverse der Fisherverteilungsfunktion mit den Freiheitsgraden f_1 und f_2.

$$f_1 = 2 \cdot (r+1) \tag{5}$$

$$f_2 = 2 \cdot (n-r) \tag{6}$$

	Freiheitsgrad f_2									
Freiheitsgrad f_1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	39,863	8,526	5,538	4,545	4,060	3,776	3,589	3,458	3,360	3,285
2	49,500	9,000	5,462	4,325	3,780	3,463	3,257	3,113	3,006	2,924
3	53,593	9,162	5,391	4,191	3,619	3,289	3,074	2,924	2,813	2,728
4	55,833	9,243	5,343	4,107	3,520	3,181	2,961	2,806	2,693	2,605
5	57,240	9,293	5,309	4,051	3,453	3,108	2,883	2,726	2,611	2,522
6	58,204	9,326	5,285	4,010	3,405	3,055	2,827	2,668	2,551	2,461
7	58,906	9,349	5,266	3,979	3,368	3,014	2,785	2,624	2,505	2,414
8	59,439	9,367	5,252	3,955	3,339	2,983	2,752	2,589	2,469	2,377
9	59,858	9,381	5,240	3,936	3,316	2,958	2,725	2,561	2,440	2,347
10	60,195	9,392	5,230	3,920	3,297	2,937	2,703	2,538	2,416	2,323

Tabelle 1: Ausgewählte Quantile der Fisherverteilungsfunktion für eine Vertrauenswahrscheinlichkeit von P_V = 90 %

Die Funktionswerte (=Quantile) der inversen Fisherverteilung können numerisch z.B. mit Hilfe von MS Excel (F.inv) oder MatLab (finv) berechnet oder in Tafelwerken nachgeschlagen werden. **Tabelle 1** gibt eine Übersicht über ausgewählte Quantile der Fisherverteilung für eine in der Betriebsfestigkeit übliche Vertrauenswahrscheinlichkeit von $P_V = 90\ \%$. Die Vertrauenswahrscheinlichkeit P_V ist ein Maß für die Zuverlässigkeit des berechneten Ergebnisses. Eine Vertrauenswahrscheinlichkeit von z.B. $P_V = 90\ \%$ bedeutet, dass in einer von zehn Prüfungen die Höchstausfallwahrscheinlichkeit P_{APmax} unterschätzt wird.

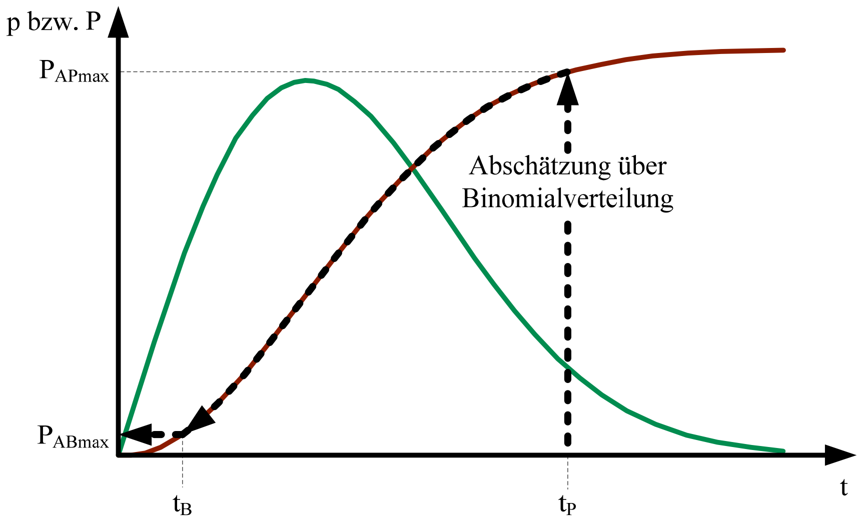

Abbildung 4: Ableitung der Höchstausfallwahrscheinlichkeit im Betrieb aus den Ergebnissen einer Prüfung

Unter der Annahme eines bekannten Formparameters b_N in Lebensdauerrichtung (ähnlich einer bekannten Standardabweichung bei der Normalverteilung) kann aus der abgeschätzten Höchstausfallwahrscheinlichkeit P_{APmax} für das Prüfergebnis die Höchstausfallwahrscheinlichkeit P_{ABmax} für den Betriebspunkt berechnet werden. Für das Prüfergebnis gilt:

$$P_{APmax} = P_A(t_P) = \frac{(r+1)\cdot F_{f_1,f_2,P_V}}{n-r+(r+1)\cdot F_{f_1,f_2,P_V}} = 1-e^{-\left(\frac{t_P}{T_N}\right)^{b_N}} \qquad (7)$$

Durch Vertauschen von $P_A(t_P)$ und des Exponentialterms mit anschließender Bildung des Kehrwerts wird folgender Ausdruck erhalten:

$$\frac{1}{1-P_A(t_P)} = e^{\left(\frac{t_P}{T_N}\right)^{b_N}} \qquad (8)$$

Logarithmieren und Wurzelziehen liefert die charakteristische Lebensdauer T_N in Lebensdauerrichtung. Unter Verwendung von Gleichung (3) kann T_N in Abhängigkeit der Betriebslebensdauer t_B und des Lebensdauerverlängerungsfaktors L_N dargestellt werden:

$$T_N = \frac{t_P}{\sqrt[b_N]{-\ln(1-P_A(t_P))}} = \frac{L_N \cdot t_B}{\sqrt[b_N]{-\ln(1-P_A(t_P))}} \qquad (9)$$

Damit sind die beiden Parameter der Weibullverteilung bekannt. Einsetzen in Gleichung (2) liefert die Höchstausfallwahrscheinlichkeit P_{ABmax} im Betriebspunkt:

$$P_{ABmax} = P_A(t_B) = 1 - e^{-\left(\frac{t_B}{T_N}\right)^{b_N}} = 1 - e^{\frac{\ln(1-P_A(t_P))}{L_N^{b_N}}} \tag{10}$$

Die Höchstausfallwahrscheinlichkeit P_{ABmax} im Betriebspunkt hängt nicht von der charakteristischen Lebensdauer T_N ab. Durch Umstellen von Gleichung (10) bzw. Kombination von Gleichung (10) mit Gleichung (4) und anschließender iterativer Lösung können die vier typischen Fragen einer Freigabeprüfung beantwortet werden:

- Wie hoch ist die Höchstausfallwahrscheinlichkeit P_{ABmax}, wenn bei einem Lebensdauerverlängerungsfaktor L_N von n Proben r ausgefallen sind?
- Wie ist der Lebensdauerverlängerungsfaktor L_N zu wählen, um bei erwartetem Prüfergebnis mit r Ausfällen und n Proben eine gewünschte Höchstausfallwahrscheinlichkeit P_{ABmax} sicherzustellen?
- Wie viele Ausfälle r sind bei einem Stichprobenumfang n und einem Lebensdauerverlängerungsfaktor L_N zu tolerieren, um die eingeforderte Höchstausfallwahrscheinlichkeit P_{ABmax} zu unterschreiten?
- Wie hoch ist der Probenbedarf n in Abhängigkeit von der Anzahl der Ausfälle r und des Lebensdauerverlängerungsfaktors L_N, um die Höchstausfallwahrscheinlichkeit P_{ABmax} zu gewährleisten?

5 Beispiele zur Freigabeprüfung mit Annahme einer Weibullverteilung

Zur Verdeutlichung der Vorgehensweise bei der Auswertung von Freigabeprüfungen mit weibullverteilten Kennwerten sollen die vier nachfolgend beschriebenen Beispiele betrachtet werden. An dieser Stelle sei nochmals darauf hingewiesen, dass für eine Freigabeprüfung die Betriebslasten sehr genau bekannt sein müssen und im Versuch mit einer hohen Güte nachgefahren werden können. Weiterhin darf sich der Schadensort durch den erhöhten Prüfumfang oder die erhöhte Prüflast nicht ändern. Werden diese Voraussetzungen nicht eingehalten, besitzen die Versuchsergebnisse keine Übertragbarkeit auf den Betrieb.

5.1 Berechnung der Höchstausfallwahrscheinlichkeit bei vorliegendem Versuchsergebnis

Bei einem Hersteller stehen $n = 5$ identische Bauteile für eine Freigabeprüfung zur Verfügung. Aus Erfahrungen ist bekannt, dass die Bauteillebensdauern diesen Typs einer zweiparametrischen Weibullverteilung mit dem Formparameter $b_N = 2$ folgen. Die Betriebslebensdauer soll $t_B = 10^5$ Schwingspiele betragen. Die Prüfung wird bis zur Prüflebensdauer von $t_P = 10^6$ durchgeführt. Dabei ergibt sich bei $n = 5$ Versuchen $r = 1$ Bruch. Die Vertrauenswahrscheinlichkeit wird zu $P_V = 90\ \%$ festgesetzt.

Aus dem Stichprobenumfang n = 5 und der Anzahl an Brüchen r = 1 werden die Freiheitsgrade f_1 und f_2 der inversen Fisherverteilung berechnet:

$$f_1 = 2 \cdot (r+1) = 2 \cdot (1+1) = 4 \qquad (11)$$

$$f_2 = 2 \cdot (n-r) = 2 \cdot (5-1) = 8 \qquad (12)$$

Unter Verwendung von **Tabelle 1** kann der Wert der inversen Fisherverteilung $F_{4,8,90\%}$ für eine Vertrauenswahrscheinlichkeit von $P_V = 90\ \%$ abgelesen werden:

$$F_{f_1,f_2,P_V} = F_{4,8,90\%} = 2{,}806 \qquad (13)$$

Durch Einsetzen der Ergebnisse in Gleichung (4) wird die Höchstausfallwahrscheinlichkeit P_{APmax} für die Prüfung abgeschätzt:

$$P_{APmax} = \frac{(r+1) \cdot F_{f_1,f_2,P_V}}{n-r+(r+1) \cdot F_{f_1,f_2,P_V}} = \frac{(1+1) \cdot 2{,}806}{5-1+(1+1) \cdot 2{,}806} \approx 0{,}5839 = 58{,}39\,\% \qquad (14)$$

Für das Versuchsergebnis ergibt sich also eine Höchstausfallwahrscheinlichkeit von $P_{APmax} = 58{,}39\ \%$. Die Höchstausfallwahrscheinlichkeit P_{ABmax} im Betriebspunkt muss niedriger liegen, da ein Lebensdauerverlängerungsfaktor $L_N > 1$ gewählt wurde. Der Lebensdauerverlängerungsfaktor L_N beträgt:

$$L_N = \frac{t_P}{t_B} = \frac{10^6}{10^5} = 10 \qquad (15)$$

Durch Einsetzen der Werte aus Gleichung (14) und Gleichung (15) in Gleichung (10) wird die Höchstausfallwahrscheinlichkeit P_{ABmax} für den Betriebspunkt berechnet:

$$P_{ABmax} = 1 - e^{\frac{\ln(1-P_A(t_P))}{L_N^{b_N}}} = 1 - e^{\frac{\ln(1-0{,}5839)}{10^2}} \approx 0{,}0087 = 0{,}87\,\% \qquad (16)$$

Unter einer Vertrauenswahrscheinlichkeit von $P_V = 90\ \%$ beträgt die Höchstausfallwahrscheinlichkeit im Betrieb $P_{ABmax} = 0{,}87\ \%$.

5.2 Wahl des Lebensdauerverlängerungsfaktors bei erwartetem Prüfergebnis

Zur Planung einer Freigabeprüfung soll der Lebensdauerverlängerungsfaktor L_N abgeschätzt werden. Für den Betrieb wird eine Höchstausfallwahrscheinlichkeit von $P_{ABmax} = 0{,}87\ \%$ unter einer Vertrauenswahrscheinlichkeit von $P_V = 90\ \%$ eingefordert. Dabei wird erwartet, dass im Versuch von n = 5 Proben maximal r = 1 Probe ausfällt. Die Lebensdauern der Proben sollen einer zweiparametrischen Weibullverteilung mit dem Formparameter $b_N = 2$ folgen.

Durch Umstellen von Gleichung (10) kann der Lebensdauerverlängerungsfaktor L_N berechnet werden:

$$L_N = \sqrt[b_N]{\frac{\ln(1-P_A(t_P))}{\ln(1-P_{ABmax})}} \qquad (17)$$

Um den Lebensdauerverlängerungsfaktor L_N zu erhalten, muss die Höchstausfallwahrscheinlichkeit $P_{APmax} = P_A(t_P)$ des Prüfergebnisses bekannt sein. Sie hängt nur vom Versuchsergebnis, d.h. dem Stichprobenumfang n und der Anzahl der Ausfälle r sowie der Vertrauenswahrscheinlichkeit P_V ab, vgl. Gleichung (4). Die beiden Freiheitsgrade f_1 und f_2 der inversen Fisherverteilung berechnen sich wie folgt:

$$f_1 = 2 \cdot (r+1) = 2 \cdot (1+1) = 4 \qquad (18)$$

$$f_2 = 2 \cdot (n-r) = 2 \cdot (5-1) = 8 \qquad (19)$$

Mit Hilfe von **Tabelle 1** und den Ergebnissen aus Gleichung (18) und (19) wird der Funktionswert der inversen Fisherverteilung $F_{4,8,90\%}$ für eine Vertrauenswahrscheinlichkeit $P_V = 90$ % bestimmt:

$$F_{f_1,f_2,P_V} = F_{4,8,90\%} = 2{,}806 \qquad (20)$$

Einsetzen des Ergebnisses aus Gleichung (20) in Gleichung (4) liefert die Höchstausfallwahrscheinlichkeit P_{APmax} für das Prüfergebnis:

$$P_{APmax} = \frac{(r+1) \cdot F_{f_1,f_2,P_V}}{n-r+(r+1) \cdot F_{f_1,f_2,P_V}} = \frac{(1+1) \cdot 2{,}806}{5-1+(1+1) \cdot 2{,}806} \approx 0{,}5839 = 58{,}39\ \% \qquad (21)$$

Mit der bekannten Höchstausfallwahrscheinlichkeit P_{APmax} des Prüfergebnisses und der geforderten Höchstausfallwahrscheinlich P_{ABmax} im Betrieb ergibt sich mit einem Formparameter $b_N = 2$ der Lebensdauerverlängerungsfaktor L_N zu:

$$L_N = \sqrt[b_N]{\frac{\ln(1-P_A(t_P))}{\ln(1-P_{ABmax})}} = \sqrt[2]{\frac{\ln(1-0{,}5839)}{\ln(1-0{,}0087)}} \approx 10 \qquad (22)$$

Mit einem Lebensdauerverlängerungsfaktor $L_N = 10$ ergibt sich beim erwarteten Prüfergebnis unter einer Vertrauenswahrscheinlichkeit von $P_V = 90$ % die eingeforderte Höchstausfallwahrscheinlich im Betrieb von $P_{ABmax} = 0{,}87$ %.

5.3 Berechnung der zu tolerierenden Anzahl an Ausfällen

Für eine Freigabeprüfung steht ein Stichprobenumfang von $n = 5$ zu Verfügung. Der Lebensdauerverlängerungsfaktor wird zu $L_N = 10$ gewählt. Unter einer Vertrauenswahrscheinlichkeit von $P_V = 90$ % soll eine Höchstausfallwahrscheinlichkeit im Betrieb von $P_{ABmax} = 0{,}87$ % gewährleistet werden. Im Vorfeld der Prüfung soll geklärt werden, wie viele Ausfälle r zu tolerieren sind, um die gestellten Forderungen zu erfüllen. Die Lebensdauern folgen einer zweiparametrischen Weibullverteilung mit dem Formparameter $b_N = 2$.

Die Berechnung der Anzahl an Ausfällen r kann nicht explizit erfolgen, da r in die Freiheitsgrade der inversen Fisherverteilung und zusätzlich in die Berechnung der Höchstausfallwahrscheinlichkeit P_{APmax} des Prüfergebnisses eingeht. Die Lösung muss daher durch Probieren gefunden werden, in dem die Anzahl an Ausfällen r schrittweise von einem Startwert aus um 1 erhöht bzw. abgesenkt wird. Die Anzahl an Ausfällen r wird so lange verändert, bis die Forderungen gerade noch erfüllt werden. Ein sinnvoller Startwert ist $r = 0$, d.h. keine Ausfälle. Dies stellt das denkbar günstigste Versuchsergebnis dar. Werden bereits hierfür die Forderungen nicht erfüllt, braucht nicht weiter gerechnet zu werden. Vielmehr muss der Stichprobenumfang n oder der Lebensdauerverlängerungsfaktor L_N erhöht, bzw. die Vertrauenswahrscheinlichkeit P_V oder die geforderte Höchstausfallwahrscheinlichkeit P_{ABmax} im Betrieb verringert werden.

Für das vorliegende Beispiel wird die Berechnung mit $r = 0$ Ausfällen begonnen. Dafür ergeben sich die Freiheitgrade f_1 und f_2 der inversen Fisherverteilung wie folgt:

$$f_1 = 2 \cdot (r+1) = 2 \cdot (0+1) = 2 \quad (23)$$

$$f_2 = 2 \cdot (n-r) = 2 \cdot (5-0) = 10 \quad (24)$$

Mit der gewählten Vertrauenswahrscheinlichkeit $P_V = 90$ % ergibt sich der Wert der inversen Fisherverteilung $F_{2,10,90\%}$ nach **Tabelle 1** zu:

$$F_{f_1,f_2,P_V} = F_{2,10,90\%} = 2{,}924 \quad (25)$$

Einsetzen der Zwischenergebnisse in Gleichung (4) liefert die Höchstausfallwahrscheinlichkeit P_{APmax} für das Prüfergebnis:

$$P_{APmax} = \frac{(r+1) \cdot F_{f_1,f_2,P_V}}{n-r+(r+1) \cdot F_{f_1,f_2,P_V}} = \frac{(0+1) \cdot 2{,}924}{5-0+(0+1) \cdot 2{,}924} \approx 0{,}3690 = 36{,}90\,\% \quad (26)$$

Mit Gleichung (10) lässt sich die Höchstausfallwahrscheinlichkeit P_{ABmax} des Betriebspunktes bestimmen:

$$P_{ABmax} = 1 - e^{\frac{\ln(1-P_A(t_P))}{L_N^{b_N}}} = 1 - e^{\frac{\ln(1-0{,}3690)}{10^2}} \approx 0{,}0046 = 0{,}46\,\% \quad (27)$$

Für $r = 0$ Ausfälle wird die Forderung nach einer Höchstausfallwahrscheinlichkeit im Betrieb von $P_{ABmax} = 0{,}87$ % übererfüllt. Daher kann in einem zweiten Iterationsschritt auf $r = 1$ erhöht und die Rechnung erneut durchgeführt werden. Für $r = 1$ ergibt sich für die Höchstausfallwahrscheinlichkeit P_{ABmax} im Betrieb:

$$P_{ABmax} = 1 - e^{\frac{\ln(1-P_A(t_P))}{L_N^{b_N}}} = 1 - e^{\frac{\ln(1-0{,}5839)}{10^2}} \approx 0{,}0087 = 0{,}87\,\% \quad (28)$$

Mir $r = 1$ Ausfall wird die Forderung genau erfüllt. Eine weitere Erhöhung der Anzahl der Ausfälle r ist nicht mehr möglich.

5.4 Berechnung des Probenbedarfs

Oftmals ist während der Freigabeprüfung bereits bekannt, dass sich unter den gegebenen Randbedingungen wie Lasterhöhungsfaktor L_N, Vertrauenswahrscheinlichkeit P_V und Höchstausfallwahrscheinlichkeit P_{ABmax} im Betrieb das Bauteil nicht freigegeben werden kann, da bereits zu viele Ausfälle r zu verzeichnen sind. Im schlimmsten Fall sind nur Ausfälle vorhanden, die Höchstausfallwahrscheinlichkeit im Betrieb beträgt dann $P_{ABmax} = 100\%$. In solchen Fällen ist es sinnvoll, den Probenbedarf n abzuschätzen, der benötigt wird um die Forderungen noch zu erfüllen, unter der Annahme, dass keine weiteren Ausfälle eintreten. Ähnlich der Berechnung der Ausfälle r muss die Lösung iterativ erfolgen, in dem der Stichprobenumfang n schrittweise von einem Startwert aus erhöht wird. Ein sinnvoller Startwert ist die Anzahl an Ausfällen plus eine Probe $n = r + 1$, da dies den Mindeststichprobenumfang darstellt.

Im betrachteten Beispiel ist bei einem Lebensdauerverlängerungsfaktor von $L_N = 10$ ein Ausfall ($r = 1$) zu verzeichnen. Gefordert wird eine Höchstausfallwahrscheinlichkeit im Betrieb von $P_{ABmax} = 0{,}87$ % unter einer Vertrauenswahrscheinlichkeit von $P_V = 90$ %. Die Lebensdauern folgen einer zweiparametrischen Weibullverteilung mit einem Formparameter $b_N = 2$.

Bei r = 1 Ausfall wird der Stichprobenumfangsstartwert wie folgt berechnet:

$$n = r + 1 = 2 \tag{29}$$

Mit dem Stichprobenumfang n und der Anzahl an Ausfällen r sind die Freiheitsgrade f_1 und f_2 der Fisherverteilung berechenbar:

$$f_1 = 2 \cdot (r+1) = 2 \cdot (1+1) = 4 \tag{30}$$

$$f_2 = 2 \cdot (n-r) = 2 \cdot (2-1) = 2 \tag{31}$$

Mit der Vertrauenswahrscheinlichkeit P_V = 90 % kann damit aus **Tabelle 1** der Funktionswert der inversen Fisherverteilung $F_{4,2,90\%}$ abgelesen werden:

$$F_{f_1,f_2,P_V} = F_{4,2,90\%} = 9{,}243 \tag{32}$$

Einsetzen der gewonnenen Ergebnisse in Gleichung (4) liefert die Höchstausfallwahrscheinlichkeit P_{APmax} für das Prüfergebnis:

$$P_{APmax} = \frac{(r+1) \cdot F_{f_1,f_2,P_V}}{n - r + (r+1) \cdot F_{f_1,f_2,P_V}} = \frac{(1+1) \cdot 9{,}243}{2 - 1 + (1+1) \cdot 9{,}243} \approx 0{,}9487 = 94{,}87\,\% \tag{33}$$

Mit Gleichung (10) lässt sich daraus die Höchstausfallwahrscheinlichkeit P_{ABmax} des Betriebspunktes abschätzen:

$$P_{ABmax} = 1 - e^{\frac{\ln(1-P_A(t_P))}{L_N^{b_N}}} = 1 - e^{\frac{\ln(1-0{,}9487)}{10^2}} \approx 0{,}0293 = 2{,}93\,\% \tag{34}$$

Mit einem Stichprobenumfang von n = 2 wird die geforderte Höchstausfallwahrscheinlichkeit P_{ABmax} im Betrieb überschritten. Der Stichprobenumfang muss daher erhöht und die Rechnung erneut durchgeführt werden. Durch mehrmaliges Erhöhen und Berechnen stellt sich heraus, dass für n = 5 die geforderte Höchstausfallwahrscheinlichkeit P_{ABmax} erstmalig erreicht wird. Der Mindestprobenbedarf beträgt in diesem Beispiel damit n = 5.

6 Zusammenfassung

Im vorliegenden Beitrag wird eine Auswertemöglichkeit für Freigabeprüfungen beschrieben, deren Kennwerte einer zweiparametrischen Weibullverteilung unterliegen. Die bisher bestehende Unsicherheit bei der Extrapolation auf sehr kleine Ausfallwahrscheinlichkeiten unter ersatzweiser Verwendung der logarithmischen Normalverteilung kann dadurch beseitigt werden. Die Entscheidung, ob die Versuchsergebnisse logarithmisch normal- oder weibullverteilt sind, wird dadurch nicht beantwortet. Bezüglich der Weibullverteilung muss in der Auswertung der Formparameter b_N genau bekannt sein oder aus Literaturwerten abgeschätzt werden. Der Formparameter b_N ist ein Maß für die Streuung der Versuchsergebnisse.

Anhand mehrerer Beispiele wird gezeigt, wie bei der Auswertung von weibullverteilten Versuchsergebnissen vorzugehen ist.

Literaturverzeichnis

[Buxb 92] O. Buxbaum
Betriebsfestigkeit: Sichere und wirtschaftliche Bemessung schwingbruchgefährdeter Bauteile
2. Auflage, Düsseldorf, Verlag Stahleisen, 1992

[FVA 554-I] A. Ziegler, K. Michaelis
Systemlebensdauerprüfung
FVA-Abschlussbericht, FVA-Forschungsvorhaben 554 I,
FVA-Heft Nr. 978, Frankfurt, FVA, 2011

[Haib 06] E. Haibach
Betriebsfestigkeit: Verfahren und Daten zur Bauteilberechnung
3. Auflage, Berlin, Springer Verlag, 2006

[Hart 09] J. Hartung, B. Elpelt, K.-H. Klösener
Statistik
15. Auflage, München, Oldenbourg, 2009

[Liu 01] J. Liu
Dauerfestigkeitsberechnung metallischer Werkstoffe
Habilitationsschrift, Clausthal-Zellerfeld, Papierflieger, 2001

[Seif 04] A. Seifried
Zur Statistik in der Betriebsfestigkeit
Weinheim, Materialwissenschaft und Technik 35 Nr. 2, 2004

[Stan 70] K. Stange
Angewandte Statistik: Erster Teil Eindimensionale Probleme
Berlin, Springer Verlag, 1970

[Weih 10] S. Weihe, N. Weigel, K. Dreßler, M. Speckert, S. Feth
Abgesicherter und effizienter Nachweis sicherheitsrelevanter Bauteile
DVM-Bericht 137, München, 2010

[Weil 07] S. Weiland
Laststandard zur betriebsfesten Auslegung und Optimierung von PKW-Anhängevorrichtungen bei Fahrradheckträgernutzung
Dissertationsschrift, Darmstadt, 2007