TU Clausthal
Clausthal University of Technology

Extrapolation von Beanspruchungskollektiven

Karsten Hinkelmann, Christian Müller, Rainer Masendorf, Alfons Esderts

Technical Report Series

Fac3-11-02

Faculty of
Mathematics/Computer Science
and Mechanical Engineering
Clausthal University of Technology

Impressum

Publisher: Fakultät für Mathematik/Informatik und Maschinenbau,
Technische Universität Clausthal
Am Regenbogen 15, 38678 Clausthal-Zellerfeld, Germany
Editor-in-chief: Alfons Esderts
Technical editor: Martina Wächter
Contact: martina.waechter@tu-clausthal.de
URL: http://www.fakultaet3.tu-clausthal.de/forschung/technical-reports/
ISSN: 1869-8018

Extrapolation von Beanspruchungskollektiven

Dipl.-Math. Karsten Hinkelmann
Dipl.-Ing. Christian Müller
Dr.-Ing. Rainer Masendorf
Prof. Dr.-Ing. Alfons Esderts

TU Clausthal – Institut für Maschinelle Anlagentechnik und Betriebsfestigkeit
Leibnizstraße 32
D-38678 Clausthal-Zellerfeld
+495323/72-2201

Abstract

The extrapolation of load collectives is an important tool in the design process of cyclically loaded parts. It is used to create design collectives. The article at hand will take an in-depth look at the extreme value extrapolation based on Gumbel. Numerical simulations are used to analyse the influence of the "number of load segments" in a load-time history. For collectives that can be mathematically described, the optimum number of segments can be determined independently of the actual collective. This method of extrapolation is valid only if the collective at hand can be mathematically described. In this case the extrapolation can also be described as an analytical progression of the mathematical collective. This case is discussed in the last chapter.

1 Einleitung

Für sicherheitsrelevante Bauteile müssen Festigkeitsnachweise erbracht werden, um einen ausfallsicheren Betrieb über ihre Nutzungsdauer zu gewährleisten. Ein Festigkeitsnachweis stellt immer einen Vergleich zwischen Beanspruchung und Festigkeit dar. Werden Bauteile schwingend beansprucht, ist neben dem statischen Nachweis auch ein Ermüdungsfestigkeitsnachweis gegen zyklische Beanspruchung zu erbringen. Beim Ermüdungsfestigkeitsnachweis wird zwischen dauerfester und betriebsfester Bemessung unterschieden, **Abbildung 1**. Dauerfeste Auslegung bedeutet, dass alle Beanspruchungsamplituden einen Mindestsicherheitsabstand zur Dauerfestigkeit einhalten. Bauteile werden meist dann dauerfest ausgelegt, wenn sie während ihrer Nutzungsdauer hohe Schwingspielzahlen erreichen. Demgegenüber steht der Betriebsfestigkeitsnachweis. Hierbei werden bewusst Beanspruchungsamplituden oberhalb der Dauerfestigkeit zugelassen, mit dem Ziel weiteres Leichtbaupotential zu nutzen.

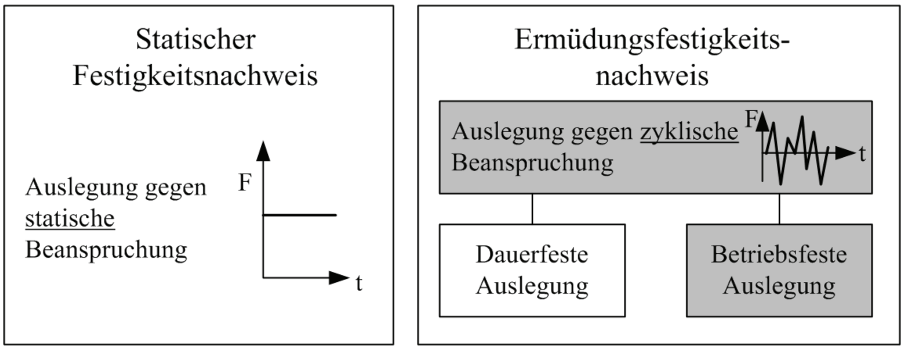

Abbildung 1: Festigkeitsnachweise gegen statische und zyklische Beanspruchung

Die statische und dauerfeste Bemessung beruht auf dem Vergleich von Kennwerten. Bei einer betriebsfesten Auslegung müssen Kenn<u>funktionen</u> für Beanspruchung und Festigkeit betrachtet werden. Festigkeitsseitig sind Wöhlerlinien oft die Grundlage eines Betriebsfestigkeitsnachweises. Für die Beanspruchung wird i. A. ein Kollektiv verwendet. Mit den Amplituden und ihrer Häufigkeit enthält das Beanspruchungskollektiv wesentliche Größen einer Beanspruchungszeitfunktion in reduzierter Form. Zur Abschätzung von Beanspruchungen stehen mehrere Methoden zur Verfügung, **Abbildung 2**.

Abschätzung nach Regelwerk	Rechnergestützte Simulation	Betriebsmessungen an ausgeführten Systemen
- Lastannahmen selten - Nur grobe Abstufungen möglich - Verwendung von gemessenen Kollektiven meist zulässig	- Vor allem in der Planungsphase zur Konstruktionsoptimierung - Reale Anlage nicht notwendig - Absicherung durch Messungen notwendig	- Zuverlässige Ermittlung der Betriebsbeanspruchungen ist möglich - Messung muss repräsentativ sein - Anlage muss ausgeführt sein - Übertragbarkeit eingeschränkt

Abbildung 2: Möglichkeiten einer Lastannahme

Hierbei können die aufgeführten Methoden auch kombiniert eingesetzt werden. Im Entwicklungsprozess eines Bauteils oder eines Systems wird häufig auf hybride Verfahren zurückgegriffen. „Alte“ Betriebsmessungen von existierenden Vorgängerbauteilen dienen beispielsweise als Eingangsdaten einer rechnergestützten Simulation für einen Prototypen.

Im Folgenden wird die Vorgehensweise zur Ermittlung eines Bemessungskollektivs am Beispiel eines PKW näher erläutert, **Abbildung 3**. Im Idealfall enthält das Bemessungskollektiv alle während der Nutzungsdauer auftretenden Beanspruchungen in ihrer Höhe und Häufigkeit. Zu Beginn müssen relevante Betriebszustände definiert werden. Für das Beispiel eines Kraftfahrzeugs ergeben sich beispielsweise fünf relevante Betriebszustände: Autobahn, gute Landstraße, Stadtverkehr, schlechte Landstraße und Schlechtweg. Im nächsten Schritt sind Teilkollektive zu erstellen, **Abbildung 3**.

Für die festgelegten Betriebszustände müssen Teilkollektive ermittelt werden, **Abbildung 3**. Dies kann messtechnisch, über Simulationen oder Regelwerke geschehen. Um eine repräsentative Messung zu erhalten, ist es erforderlich jeden Betriebszustand ausreichend lang messtechnisch zu erfassen. Eine nichtrepräsentative Messung kann nicht zuverlässig extrapoliert werden. Die Überführung der gemessenen Beanspruchungszeitfunktionen in Kollektive erfolgt mithilfe von Zählverfahren. Ein umfangreicher Überblick zu Zählverfahren ist in [Köhl 11] gegeben.

Anschließend erfolgt die Festlegung der Bauteilnutzungsdauer und die Gewichtung der Teilkollektive, **Abbildung 3**. Repräsentative Gesamtnutzungsdauern können sich aus Kundenansprüchen oder auch Gewährleistungsvorgaben ergeben und müssen vor der Superposition (Überlagerung) und der Gewichtung der Teilkollektive festgelegt werden. Die Gewichtung gibt an, welchen Anteil ein Teilkollektiv am Bemessungskollektiv hat. Für Schienenfahrzeuge oder Kräne existieren beispielsweise Standardeinsatzspiegel. Die Gesamtnutzungsdauer für den PKW ist im CARLOS (CARLOadStandard) auf 42000 km festgelegt [Schü 90]. Dabei besitzen die fünf Betriebszustände die folgenden Anteile:

- Autobahn 30 % (12 000 km)
- Gute Landstraße 29 % (11 600 km)
- Stadtverkehr 23 % (9 200 km)
- Schlechte Landstraße 14 % (5 600 km)
- Schlechtweg 4 % (1 600 km)

Mit der Gesamtnutzungsdauer und der Gewichtung ist bekannt, für welche Streckenlänge die Teilkollektive gelten müssen (Teilfolgenumfänge). Die messtechnisch ermittelten Teilkollektive gelten aber nur für den Zeitraum der Messung, sodass eine Extrapolation erforderlich wird, **Abbildung 3**. Dazu stehen verschiedene Methoden zur Verfügung, Kapitel 3.

Liegen alle extrapolierten Teilkollektive vor, müssen sie durch Superposition zu einem Bemessungskollektiv überlagert werden, indem alle Stufen der Teilkollektive in ein gemeinsames Bemessungskollektiv zusammengefasst werden.

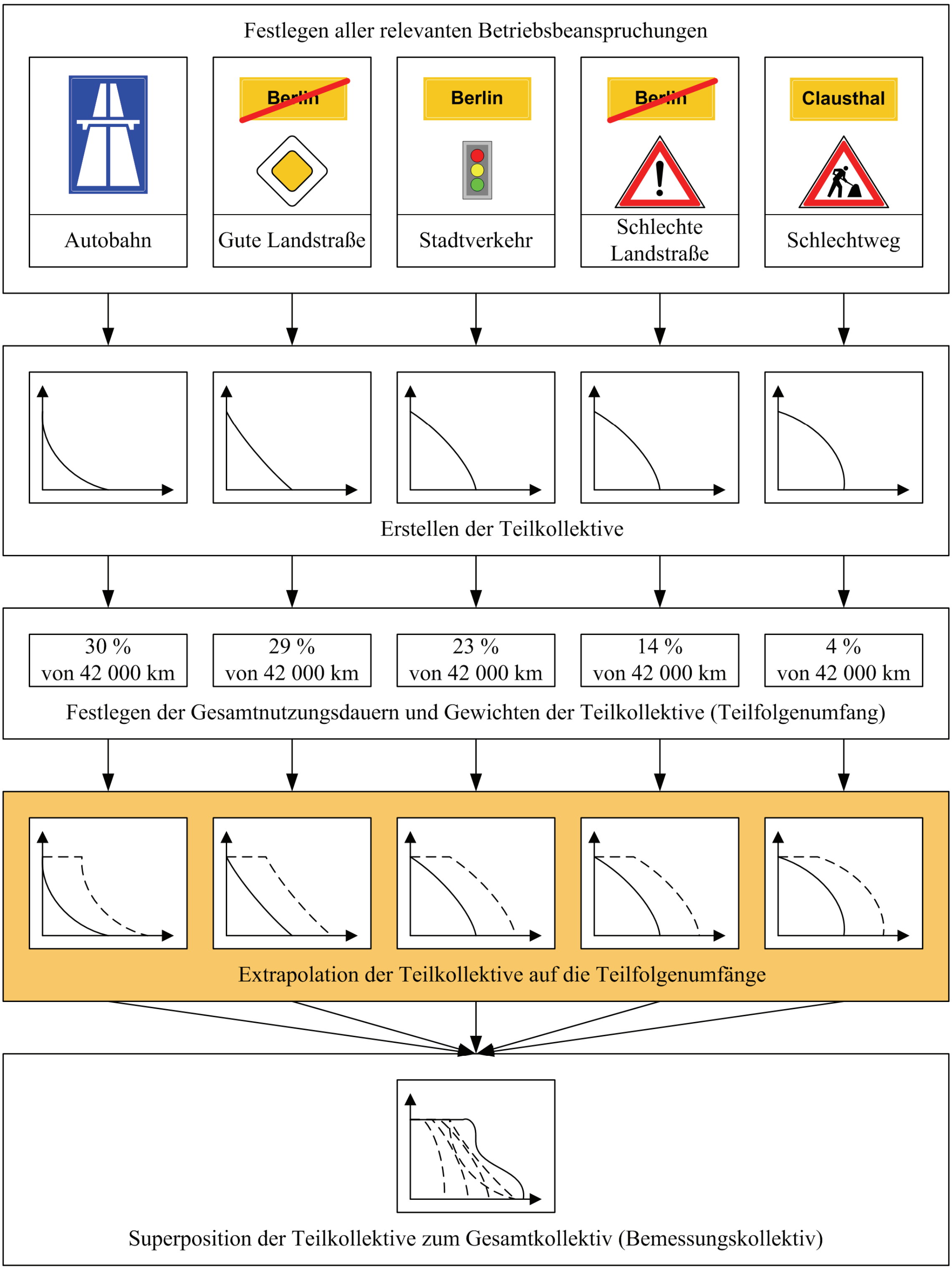

Abbildung 3: Herleitung von Bemessungskollektiven

2 Mathematisch beschreibbare Lastkollektive

Ein Lastkollektiv enthält mit seinen Amplituden und Häufigkeiten die Größen, welche als wesentlich für die Werkstoffschädigung erachtet werden. Man kann es aus Messungen oder Simulationen ableiten, indem Zählverfahren eingesetzt werden, **Abbildung 4**.

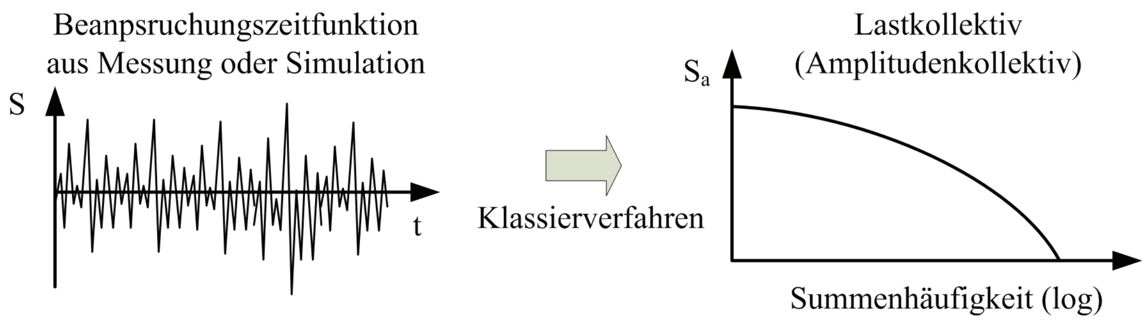

Abbildung 4: Von der Messung zum Lastkollektiv

Ein Kollektiv beschreibt den Zusammenhang zwischen der Beanspruchungsamplitude S_a und der zugehörigen Summenhäufigkeit H oder Stufenhäufigkeit h (Häufigkeit mit der die Spannungsamplitude S_a auftritt), [Gude 99]. Oft können gemessene oder simulierte Lastkollektive durch sogenannte Einheitskollektive angenähert werden, die mathematisch beschrieben werden können, Gleichung (1), [Hank 70], [Hück 88]. Dabei beschreiben $\hat{S}_a$ den Kollektivhöchstwert und H_0 den Kollektivumfang. Der Formparameter υ beschreibt den Verlauf des Kollektivs zwischen dem Kollektivhöchstwert $\hat{S}_a$ und dem Kollektivumfang H_0, **Abbildung 5**.

$$H = H_0^{1-\left(\frac{S_a}{\hat{S}_a}\right)^{\upsilon}} \qquad (1)$$

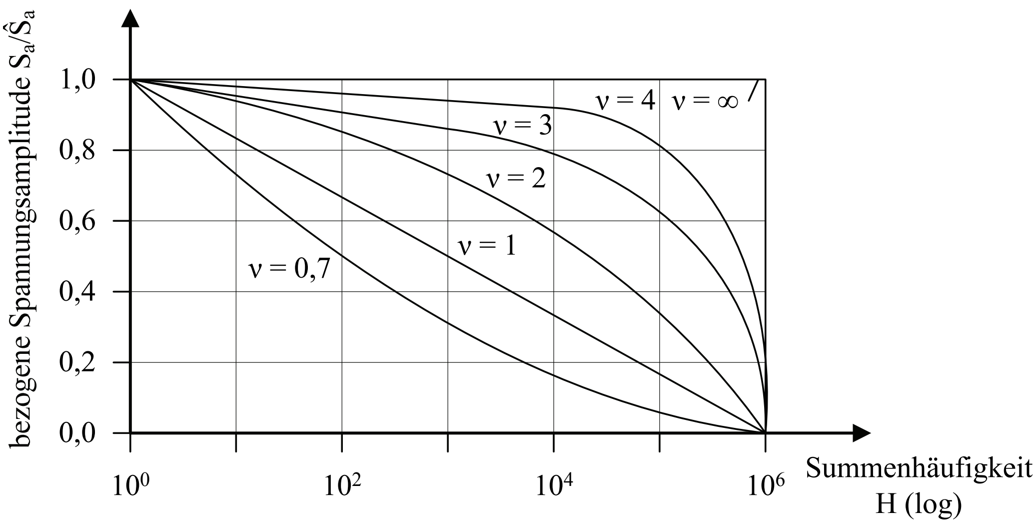

Abbildung 5: Mathematisch beschreibbare Kollektive für verschiedene Formparameter υ

Das härteste Lastkollektiv ist ein Einstufenkollektiv (υ = ∞), **Abbildung 5**. Kollektive mit einem Formparameter von υ = 2 werden auch als Normkollektive bezeichnet. Sie treten nach [Buxb 92] typischerweise bei stationären Prozessen auf. Kollektive mit

Formparameter $\upsilon = 1$ werden als Geradlinienkollektive bezeichnet, da sie in der üblichen halblogarithmischen Darstellung als Gerade erscheinen.

Weitere Möglichkeiten Lastkollektive mathematisch zu beschreiben sind in [FKM 03] und [Haib 06] gegeben.

3 Verfahren zur Extrapolation von Lastzeitreihen

In der Literatur sind Vorschläge zur Extrapolation gegeben:

- Grafische Extrapolation eines Lastkollektivs [Gude 99],
- Extremwertextrapolation in Anlehnung an Gumbel [Buxb 92],
- Rainflowmatrixextrapolation nach Krüger [Krüg 85],
- Rainflowmatrixextrapolation nach Dreßler [Dreß 96].

Alle genannten Methoden enthalten Parameter, die vom Anwender frei wählbar sind und das Endergebnis stark beeinflussen können.

- Grafische Extrapolation: Wahl des Höchstwerts des extrapolierten Kollektivs
- Extremwertextrapolation in Anlehnung an Gumbel: Wahl der Lastabschnittanzahl
- Rainflowmatrixextrapolation nach Krüger: Wahl des exponentiellen Verteilungsgesetzes
- Rainflowmatrixextrapolation nach Dreßler: Wahl der Gewichtungsfunktion

Im Weiteren soll nur die Extremwertextrapolation in Anlehnung an Gumbel betrachtet werden. In [Buxb 92] und [Gude 99] wird das Verfahren zur Extremwertextrapolation beschrieben, welches auf der Extremwertstatistik nach Gumbel [Gumb 58] basiert. In der Betriebsfestigkeit wird das Verfahren in abgewandelter Form eingesetzt. Streng genommen, erfüllt die nachfolgende Vorgehensweise die von Gumbel gestellten Voraussetzungen nicht vollständig. Weiterhin wird das von Gumbel vorgegebenen Verteilungsgesetz der Extremwerte (Gumbelverteilung) durch eine logarithmische Normalverteilung angenähert. Für die Belange der Betriebsfestigkeit ist nach Buxbaum die oben beschriebene Vorgehensweise dennoch hinreichend zuverlässig, [Buxb 92].

Ziel der Extremwertextrapolation ist es, den Kollektivhöchstwert $\hat{S}_{aN}$ des Nutzungsdauerkollektivs möglichst gut abzuschätzen, indem das aufgenommene Messsignal verwendet wird. Das Extrapolationsverfahren ist nach [Buxb 92] nur für mathematische Kollektive und deren Linearkombinationen anwendbar, wobei nach folgenden Schritten vorzugehen ist, **Abbildung 6**.

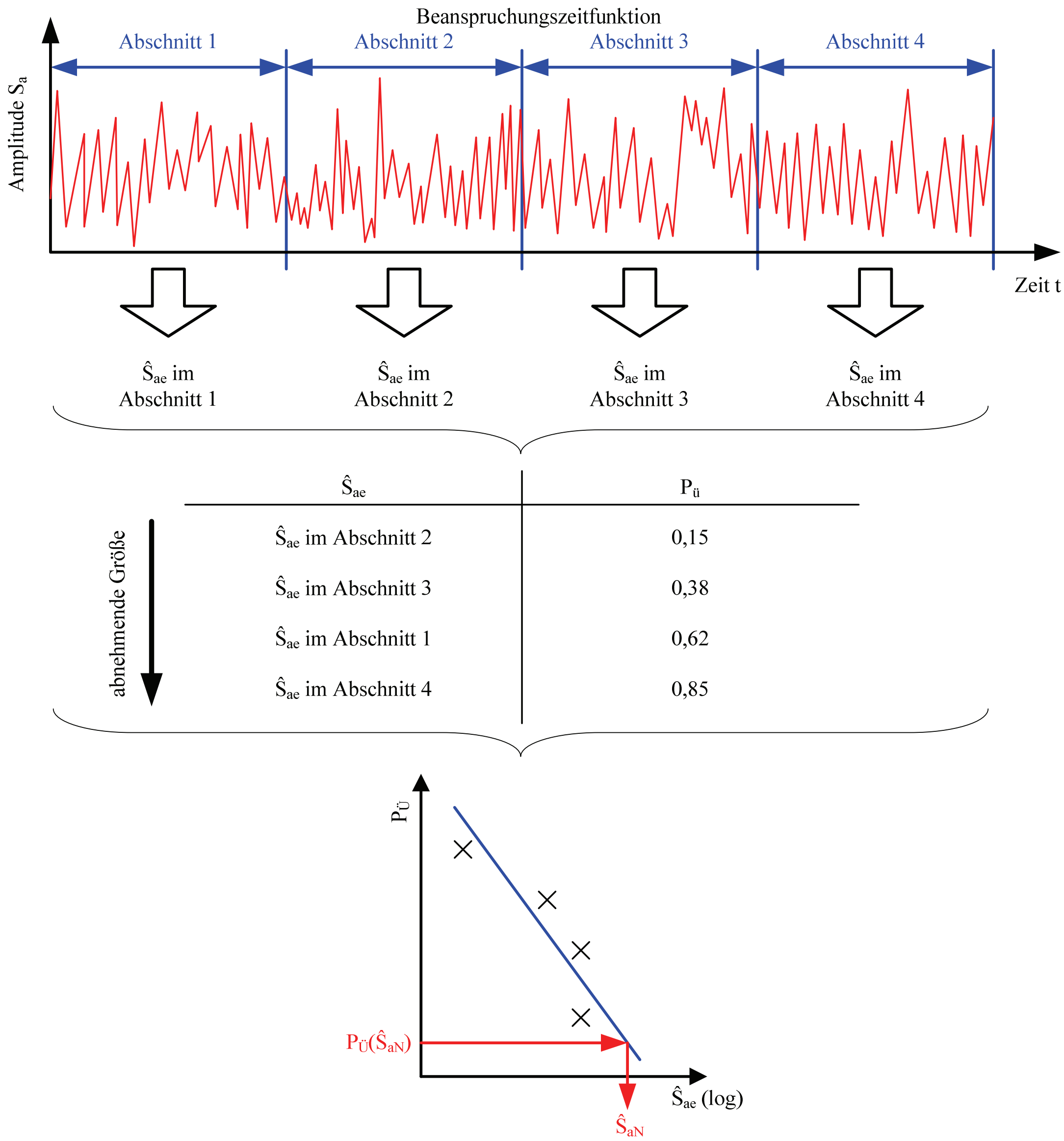

Abbildung 6: Extremwertextrapolation in Anlehnung an Gumbel

Eine vorliegende Beanspruchungszeitfunktion mit der Messlänge H_M wird in m Lastabschnitte gleicher Länge eingeteilt. In jedem Abschnitt wird die größte auftretende Spannungsamplitude $\hat{S}_{ae}$ ermittelt. Die Extremwerte $\hat{S}_{ae}$ werden in der Regel in ein logarithmisch-normalverteilt geteiltes Wahrscheinlichkeitspapier eingetragen, **Abbildung 6**. Dabei kann ihre Überschreitenswahrscheinlichkeit $P_Ü$ beispielsweise mithilfe der Formel nach Rossow abgeschätzt werden, die nur von der Ordnungszahl i und der Anzahl der Abschnitte m abhängt, Gleichung (2).

$$P_Ü = \frac{3 \cdot i - 1}{3 \cdot m + 1} \quad (2)$$

Der Kollektivhöchstwert des Nutzungsdauerkollektivs kann nach der Berechnung seiner Überschreitenswahrscheinlichkeit $P_Ü$ im Wahrscheinlichkeitsdiagramm abgeschätzt werden. Sind während der Nutzungsdauer n Lastabschnitte zu erwarten, so berechnet sich die Überschreitenswahrscheinlichkeit des Nutzdauerkollektivhöchstwerts gemäß Gleichung (3).

$$P_{\ddot{U}}\left(\hat{S}_{aN}\right) = \frac{2}{3 \cdot n + 1} \qquad (3)$$

Im Wahrscheinlichkeitspapier kann mit diesem Ergebnis der Nutzdauerkollektivhöchstwert $\hat{S}_{aN}$ abgelesen werden, **Abbildung 6**. Das extrapolierte Kollektiv setzt sich zusammen aus dem Nutzdauerkollektivhöchstwert $\hat{S}_{aN}$ und dem mit dem Extrapolationsfaktor e multiplizierten Lastkollektiv aus der Messung. Der Extrapolationsfaktor e stellt hierbei das Verhältnis aus Nutzungs- und Messdauer dar, Gleichung (4).

$$e = \frac{H_N}{H_M} \qquad (4)$$

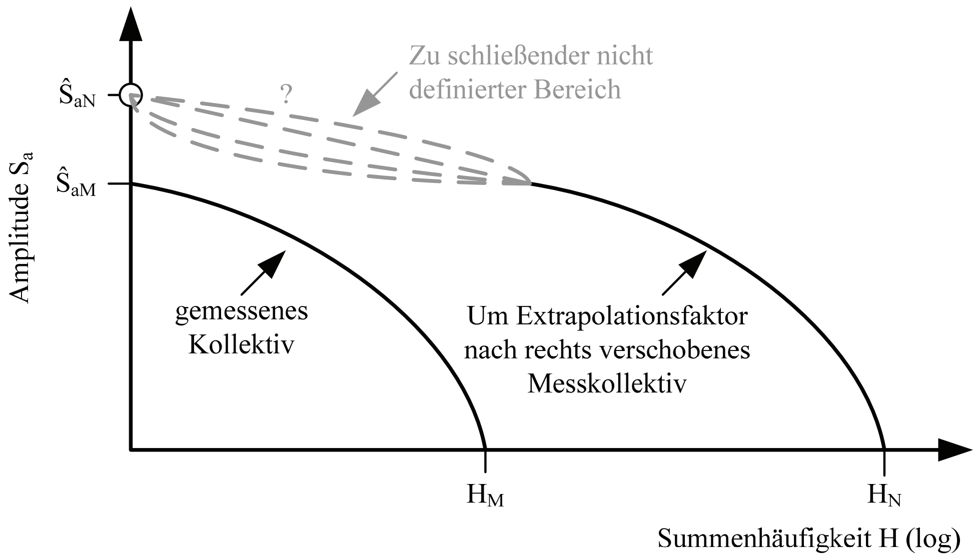

Abbildung 7: Nicht definierter Bereich zwischen rechtsverschobenem Messkollektiv und Nutzungsdauerkollektivhöchstwert

Die zu Beginn gewählte Abschnittanzahl m hat einen entscheidenden Einfluss auf die Vorhersagegüte des durch Extrapolation abgeschätzten Nutzdauerkollektivhöchstwert $\hat{S}_{aN}$, [Buxb 92]. In der Literatur sind keine Vorschriften angegeben, wie die Abschnittanzahl m anzunehmen ist, damit gute Schätzungen erzielt werden können. Weiterhin fehlen Hinweise darauf, wie der nicht definierte Bereich, **Abbildung 7**, zwischen rechtsverschobenem Messkollektiv und dem Nutzdauerkollektivhöchstwert zu schließen ist. Diese Fragestellungen werden in den folgenden Kapiteln diskutiert.

4 Simulation von Lastzeitreihen und Extrapolation der generierten Kollektive

Im folgenden Abschnitt wird untersucht, welchen Einfluss die verwendete Abschnittanzahl auf die Güte der Kollektivhöchstwertschätzung hat. Einerseits stellt sich die Frage wie sensitiv die Höchstwertschätzung auf die Wahl der Abschnittanzahl reagiert, anderseits soll die optimale Abschnittanzahl gefunden werden, mit der die Schätzung am besten gelingt. Dabei werden die Messdauer H_M, die Kollektivform ν und der Extrapolationsfaktor e (Verhältnis aus Nutzungs- und Messdauer) variiert.

Um den Einfluss der Abschnittanzahl auf die Güte der Kollektivhöchstwertschätzung untersuchen zu können, werden Simulationen durchgeführt, **Abbildung 8**. In die Simulation gehen die Messdauer H_M, die Nutzungsdauer H_N und die Kollektivform ν ein. Weiterhin werden Grenzen festgesetzt in denen die Abschnittanzahl m in m_{delta} Schritten variiert wird. Mit den Eingaben zum Kollektiv ist das mathematische Kollektiv der Nutzungsdauer vollständig beschrieben, sofern der Kollektivhöchstwert $\hat{S}_{aN}$ zu eins festgesetzt wird. Hieraus lässt sich wiederum die Lastfolge für die Nutzungsdauer mithilfe von Zufallszahlen rekonstruieren, indem H_N Amplituden aus dem Nutzungsdauerkollektiv gezogen werden, **Abbildung 8**. Aus dieser Nutzungsdauerlastfolge der Länge H_N wird eine kürzere Lastfolge der Länge H_M entnommen, welche das gemessene Signal repräsentiert. Das entnommene „Messsignal“ kann in Abschnitte unterteilt und nach der Vorschrift aus Kapitel 3 extrapoliert werden. Die Extrapolation erfolgt mit unterschiedlichen Abschnittanzahlen innerhalb vorgegebener Grenzen, **Abbildung 8**. Da der Rekonstruktion der Lastfolge ein Zufallsprozess zugrunde liegt, muss das Generieren der Lastfolgen, das Entnehmen des Messsignals und dessen Extrapolation mit unterschiedlichen Abschnittanzahlen mehrfach (Anzahl der Wiederholungen = wdh, **Abbildung 8**) durchgeführt werden. Somit liegt an Ende der Simulation für jede Abschnittanzahl eine Verteilung der geschätzten Höchstwerte vor. Die optimale Abschnittanzahl, mit der der Kollektivhöchstwert im Mittel getroffen wird, ist somit bekannt, **Abbildung 8**.

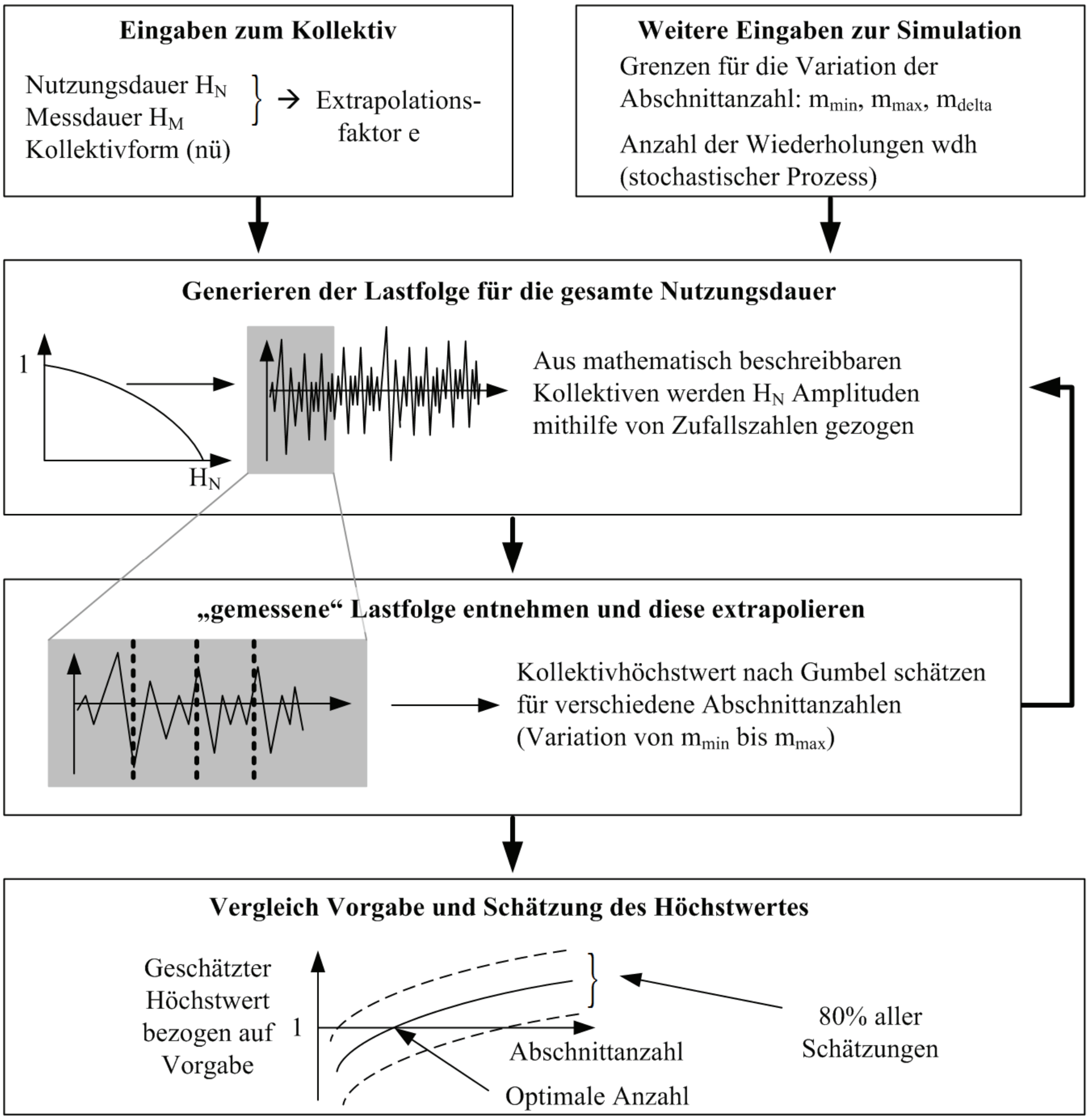

Abbildung 8: Simulation zur Untersuchung des Einflusses der Abschnittanzahl auf die Höchstwertschätzung

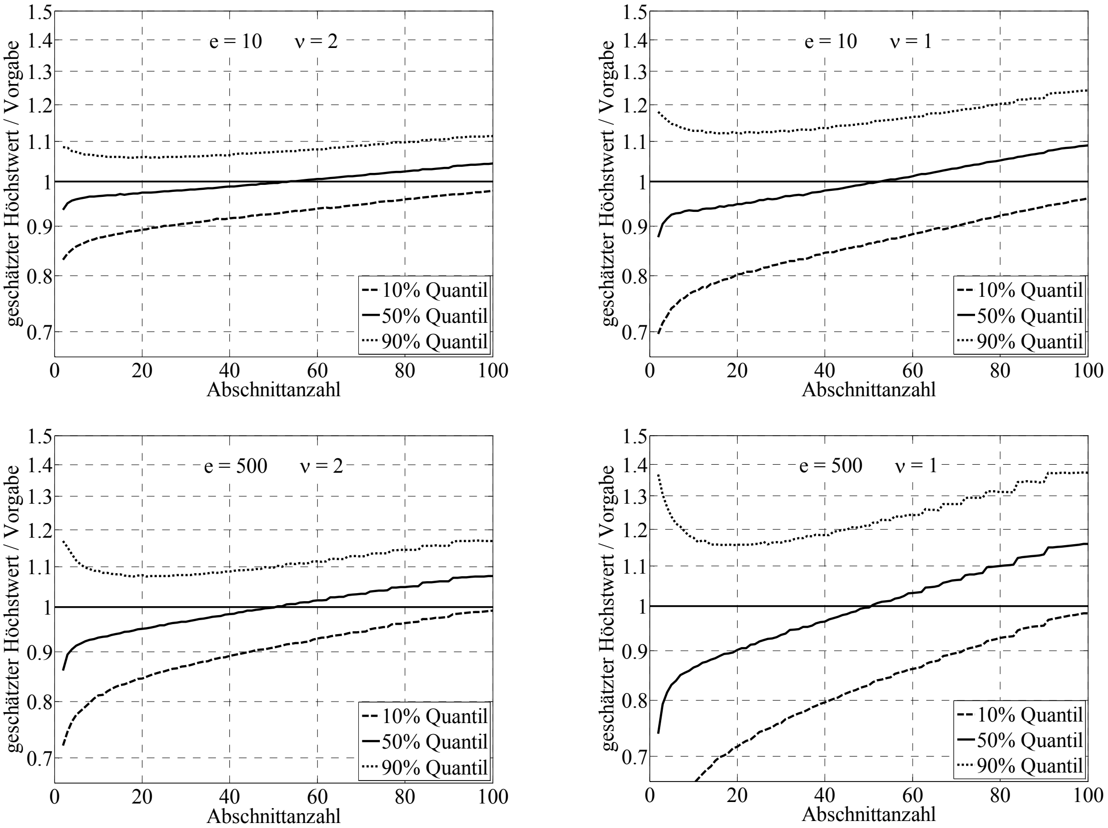

Abbildung 9: Einfluss der Abschnittanzahl auf die Kollektivhöchstwertschätzung (Messumfang H_M=konst.=10^3, wdh=10.000)

Welchen Einfluss die Abschnittanzahl auf die Kollektivhöchstwertschätzung hat, kann **Abbildung 9** entnommen werden. Die mittlere Kollektivhöchstwertschätzung ist mit dem 50%-Quantil (durchgezogene Linie) gegeben. Innerhalb der gestrichelten Linien liegen 80% aller Schätzungen. Grundsätzlich lässt sich feststellen, dass mit zunehmender Abschnittanzahl der Höchstwert größer geschätzt wird. Für die hier untersuchten mathematischen Kollektive existiert ein Optimum, welches unabhängig vom Extrapolationsfaktor e und von der Kollektivform ν ist. Im gezeigten Beispiel sind ca. 50 Abschnitte optimal. Bei der vorgegebenen Messlänge von H_M=10^3 ergibt sich die Häufigkeit der Amplituden in einem Abschnitt zu 20. Die Schätzung wird umso sicherer, je völliger das Kollektiv und je kleiner der Extrapolationsfaktor ist. Weiterhin reagieren weniger völlige Kollektive und große Extrapolationsfaktoren viel empfindlicher auf die falsche Wahl der Abschnittanzahl (steilerer Verlauf der Linien).

Der Einfluss des Messumfangs H_M wurde bisher noch nicht betrachtet, da er konstant gehalten wurde. **Abbildung 10** zeigt zwei Simulationen mit unterschiedlichen Messumfängen. Die bisherige Simulation mit einem Messumfang von H_M=10^3 Lastwechseln wird einer weiteren Simulation mit H_M=3x10^3 Zyklen gegenübergestellt. Erwartungsgemäß ist die Schätzung auf Grundlage der längeren Messung zuverlässiger. Die optimale Abschnittanzahl unterscheidet sich allerdings erheblich. Die Wahl der Abschnittanzahl, sollte also nicht unabhängig vom Messumfang erfolgen.

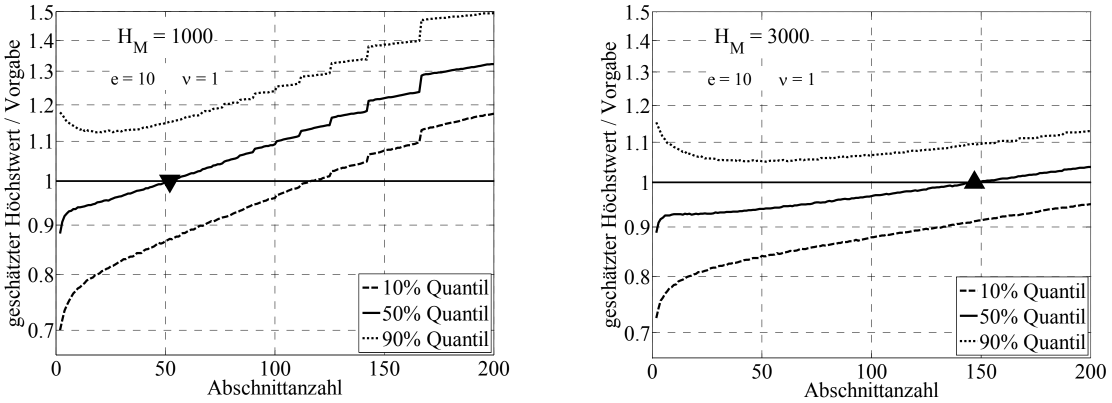

Abbildung 10: Einfluss des Messumfangs H_M auf die optimale Abschnittanzahl (wdh=10.000)

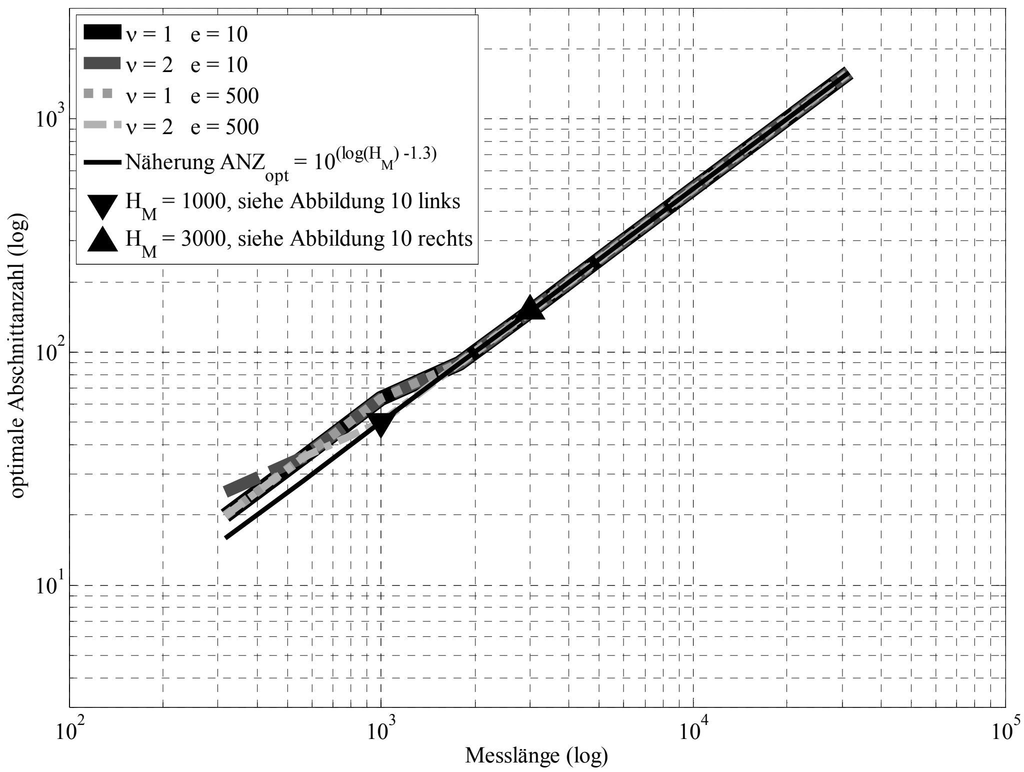

Abbildung 11: Optimale Abschnittanzahl in Abhängigkeit der Messlänge

Für mathematisch beschreibbare Kollektive wurde gezeigt, dass die optimale Abschnittanzahl unabhängig von der Kollektivform ν und dem Extrapolationsfaktor e ist, jedoch stark von der Messlänge H_M beeinflusst wird. Daher wird im Folgenden die Messlänge H_M zwischen $10^{2,5} \leq H_M \leq 10^{4,5}$ variiert und die jeweils zugehörige optimale Abschnittanzahl ermittelt. In **Abbildung 11** ist die optimale Abschnittanzahl über der Messlänge H_M für verschiedene Kollektivformen ν und Extrapolationsfaktoren e aufgetragen. Im doppeltlogarithmischen Papier ergibt sich zwischen optimaler Abschnittanzahl ANZ_{opt} und Messlänge H_M ein linearer Zusammenhang, der in guter Näherung mit Gleichung (5) beschrieben werden kann.

$$ANZ_{opt} = 10^{(\log(H_M)-1,3)} \qquad (5)$$

Aus Gleichung (5) geht hervor, dass die Abschnittanzahl bei der Extrapolation mathematischer Kollektive 1,3 Dekaden kleiner gewählt werden sollte als die Häufigkeit der Messlänge H_M. Dies ist gleichbedeutend mit einer Amplitudenhäufigkeit von 20 je Abschnitt, unabhängig von der Messlänge H_M. Liegt ein Messkollektiv vor, welches nicht näherungsweise mit Gleichung (1) beschrieben werden kann, ist die Anwendung von Gleichung (5) unzulässig.

Das folgende hypothetische Beispiel zeigt die Auswirkungen, falls die beschriebene Vorgehensweise dennoch angewendet wird. In **Abbildung 12 links** ist ein Nutzungsdauerkollektiv gegeben, welches aus der Überlagerung zweier mathematischer Kollektive konstruiert wurde. Entnimmt man dem Nutzungsdauerkollektiv (Kollektiv mit durchgezogener Linie in **Abbildung 12 links**) eine Messung und versucht daraus den Nutzungsdauerhöchstwert zu schätzen, vgl. auch **Abbildung 8**, so werden sich die Abschnitthöchstwerte der Messung nicht mehr entlang einer Geraden im log-normalverteilten Wahrscheinlichkeitspapier anordnen, **Abbildung 12 rechts**. Dies liegt in den unterschiedlichen Teilgrundgesamtheiten des Nutzungsdauerkollektivs begründet. Die Stichprobe (Messung) enthält nur noch sehr wenige Abschnitthöchstwerte, welche dem Teilkollektiv der Überlast entstammen. Das Abschätzen des Kollektivhöchstwertes entlang der Regressionsgeraden ist somit fehlerhaft.

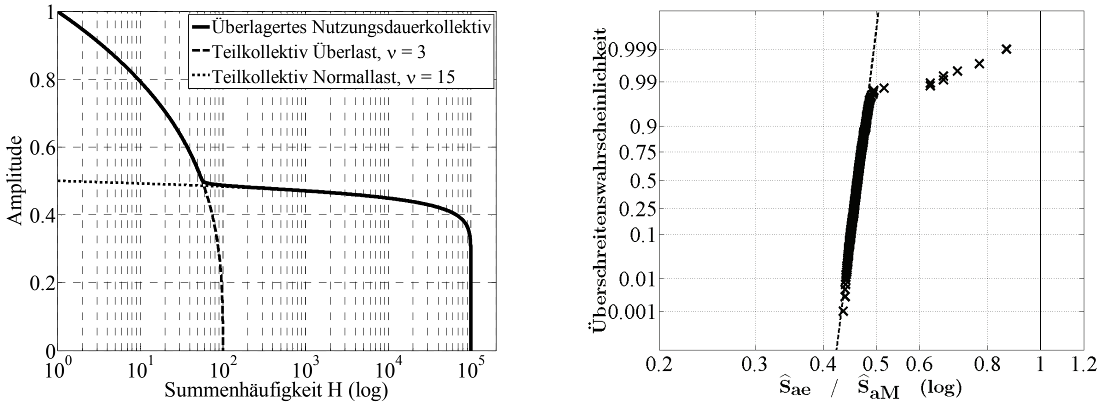

Abbildung 12: Optimale Abschnittanzahl in Abhängigkeit der Messlänge

In solchen Fällen sollte versucht werden, das gemessene Kollektiv in mathematisch beschreibbare Teilkollektive zu zerlegen (inverse Superposition), um diese anschließend einzeln zu extrapolieren. Die extrapolierten Teilkollektive können anschließend wieder zu dem gesamten extrapolierten Kollektiv überlagert werden. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die Verteilungsfunktion, **Abbildung 12 rechts** mit Hilfe von Kerndichteschätzern (Überlagerung mehrerer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen) zu beschreiben, [Silv 84].

5 Verlauf des Amplitudenkollektivs zwischen extrapolierten und gemessenem Höchstwert

Bisher wurde gezeigt, wie der Kollektivhöchstwert des Nutzungsdauerkollektivs geschätzt werden sollte. Über den verbleibenden Bereich zwischen dem gemessenen Höchstwert und dem Nutzungsdauerhöchstwert wurden noch keine Aussagen getroffen. Um diesen nicht definierten Abschnitt zu belegen, wird der Extrapolationsfaktor aufsteigend bis zum Endwert variiert, um Stützstellen zu berechnen (hier von $e=10^{0.1}$ bis $e=10^{2}$). Die Berechnung erfolgt hierbei immer mit der optimalen Abschnittanzahl nach Kapitel 4. Das jeweilige Zwischenergebnis (Höchstwert für einen „eingefügten“ Extrapolationsfaktor) wird nach rechts verschoben und agiert somit als Stützstelle zwischen gemessenem und extrapoliertem Höchstwert. **Abbildung 13** zeigt, dass mit dieser Vorgehensweise das rechtsverschobene Messkollektiv erwartungsgemäß seiner mathematischen Beschreibung folgt. Das heißt, der Formparameter ν bleibt bei der Extrapolation mathematischer Kollektive erhalten.

Da die vorgestellte Extrapolationsmethode nur für die nach Gleichung (1) beschriebenen Kollektive in Kombination mit der Näherungslösung zuverlässig ist, können die mathematischen Messkollektive auch analytisch bis zur Nutzungsdauer beschrieben werden. Somit entfällt die Einteilung in Abschnitte, das Sortieren der Höchstwerte und das anschließende Abschätzen des Nutzungskollektivhöchstwertes.

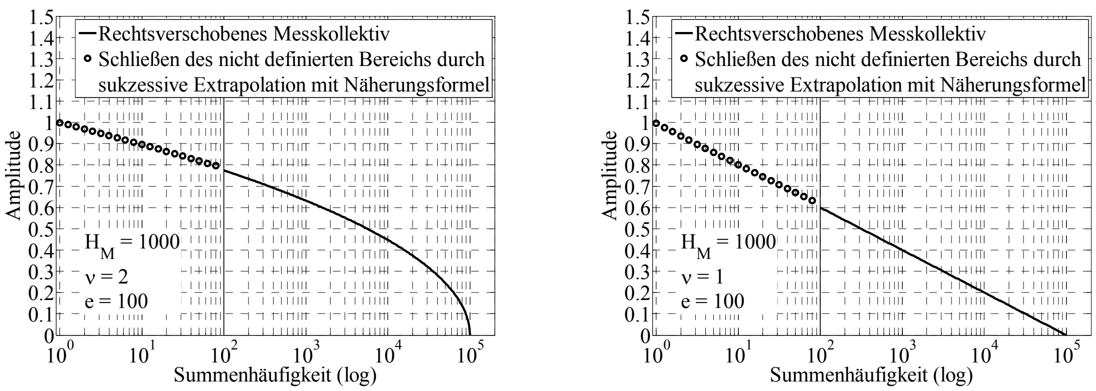

Abbildung 13: Nicht definierter Bereich zwischen Messkollektiv und Nutzungsdauerkollektivhöchstwert durch sukzessive Extrapolation belegen, links: Normkollektiv ν=2, rechts: Geradlinienkollektiv ν=1

6 Mathematische Kollektive analytisch extrapolieren

Ziel soll es sein den Nutzungsdauerkollektivhöchstwert $\hat{S}_{aN}$ aus den bekannten Größen: Messdauerkollektivhöchstwert $\hat{S}_{aM}$, Messumfang H_M, Kollektivform ν und Nutzungsumfang H_N analytisch zu bestimmen. Für die folgenden Betrachtungen wird die Ordinate auf den Kollektivhöchstwert des zu bestimmenden Nutzungskollektivs $\hat{S}_{aN}$ bezogen,

Abbildung 14. Das Nutzungsdauerkollektiv besitzt demnach immer den Höchstwert eins und kann gemäß Gleichung (6) beschrieben werden.

$$H = H_N^{1-\left[\frac{S_a}{\hat{S}_{aN}}\right]^{\upsilon}} \qquad (6)$$

Wie auch in den vorangegangen Kapiteln wird das Messkollektiv um den Extrapolationsfaktor e nach „rechts verschoben“, **Abbildung 14**. In Gleichung (6) kann somit der Punkt (e, $\hat{S}_{aM}$ / $\hat{S}_{aN}$) eingesetzt werden.

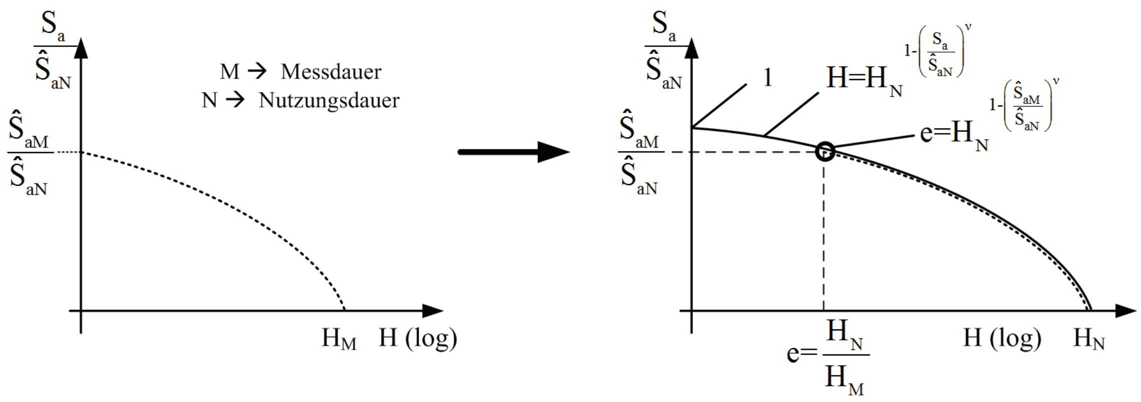

Abbildung 14: Analytische Extrapolation

$$e = H_N^{1-\left(\frac{\hat{S}_{aM}}{\hat{S}_{aN}}\right)^{\upsilon}} \qquad (7)$$

Der Extrapolationsfaktor beschreibt das Verhältnis aus Nutzungsdauer H_N und Messdauer H_M, Gleichung (8).

$$e = \frac{H_N}{H_M} \qquad (8)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (7) in Gleichung (8) ergibt sich:

$$e = H_N^{1-\left(\frac{\hat{S}_{aM}}{\hat{S}_{aN}}\right)^{\upsilon}} \rightarrow \frac{H_N}{H_M} = H_N^{1-\left(\frac{\hat{S}_{aM}}{\hat{S}_{aN}}\right)^{\upsilon}} \rightarrow \frac{1}{H_M} = H_N^{-\left(\frac{\hat{S}_{aM}}{\hat{S}_{aN}}\right)^{\upsilon}} \qquad (9)$$

Das Logarithmieren und weitere Umformen von Gleichung (9) führt zum gesuchten Zusammenhang. Der „Überhöhungsfaktor“ der Kollektivhöchstwerte $\hat{S}_{aN}$ / $\hat{S}_{aM}$ steigt mit dem Verhältnis der logarithmierten Kollektivumfänge an. Erwartungsgemäß fällt die Überhöhung bei härteren Kollektiven geringer aus.

$$\log(H_M) = \left(\frac{\hat{S}_{aM}}{\hat{S}_{aN}}\right)^{\upsilon} \cdot \log(H_N) \rightarrow \underline{\frac{\hat{S}_{aN}}{\hat{S}_{aM}} = \left(\frac{\log(H_N)}{\log(H_M)}\right)^{\frac{1}{\upsilon}}} \rightarrow \hat{S}_{aN} = \hat{S}_{aM} \cdot \left(\frac{\log(H_N)}{\log(H_M)}\right)^{\frac{1}{\upsilon}} \qquad (10)$$

Wird beispielsweise bei einer Messung ein Geradlinienkollektiv mit einem Messumfang von $H_M=10^4$ ermittelt und ein Nutzungsdauerkollektiv mit dem Umfang $H_N=10^6$ benötigt, so wird der Kollektivhöchstwert des Nutzungsdauerkollektivs um den Faktor 1,5 größer sein, als der des Messkollektivs, **Abbildung 15**.

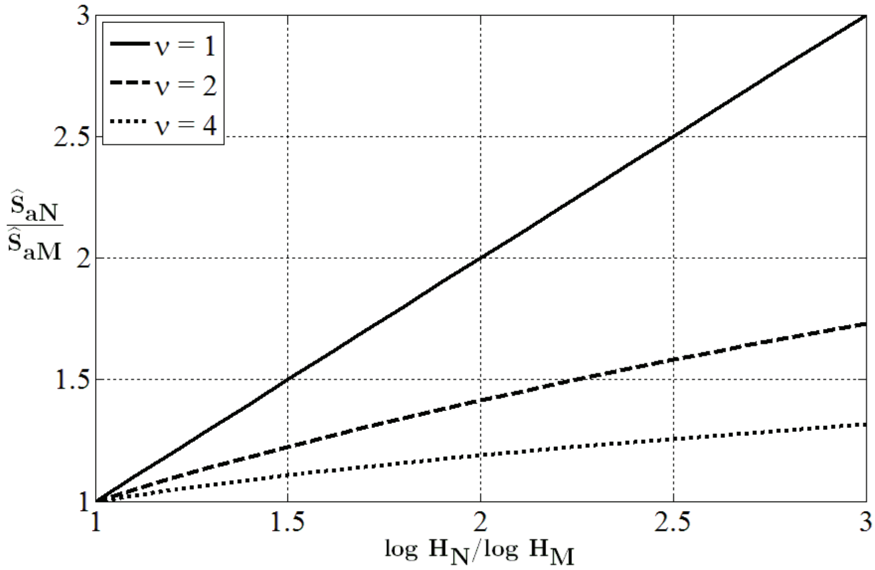

Abbildung 15: Analytische Kollektivhöchstwertschätzung

7 Zusammenfassung

Im vorliegenden Beitrag wird die Extremwertextrapolation untersucht, wie sie in der Betriebsfestigkeit angewendet wird. Anhand einer Simulation mit mathematisch beschreibbaren Kollektiven wird gezeigt, welchen Einfluss die Wahl der Abschnittanzahl auf das Extrapolationsergebnis hat. Die Abschnittslänge sollte so gewählt werden, dass in jedem Abschnitt 20 Amplituden enthalten sind. Die optimale Abschnittanzahl lässt sich demnach mit Gleichung (11) berechnen.

$$ANZ_{opt} = 10^{(\log(H_M)-1,3)} \qquad (11)$$

Die beschriebene Vorgehensweise und die Gleichung zur Bestimmung der optimalen Abschnittanzahl sind nur für mathematisch beschreibbare Kollektive nach Gleichung (1) zulässig.

Der Bereich zwischen dem extrapolierten und gemessenen Höchstwert kann durch sukzessive Rechtsverschiebung und mehrfaches Extrapolieren geschlossen werden, indem Stützstellen berechnet werden. In diesem Bereich folgt das extrapolierte Kollektiv der vorgegebenen Kollektivform. D. h., das extrapolierte Kollektiv kann auch direkt mit der Vorschrift des rechtsverschobenen Messkollektivs analytisch beschrieben werden, **Abbildung 16**.

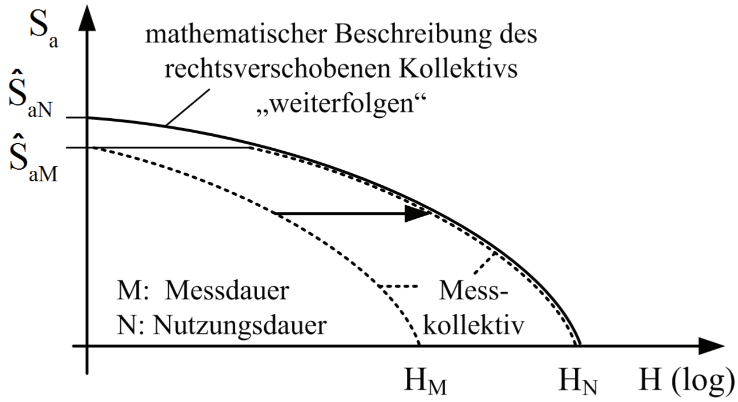

Abbildung 16: Extrapoliertes Kollektiv mathematisch beschreiben

Literaturverzeichnis

[Buxb 92] O. Buxbaum:
Betriebsfestigkeit: Sichere und wirtschaftliche Bemessung schwingbruchgefährdeter Bauteile
2. Auflage, Verlag Stahleisen, Düsseldorf, 1992

[Dreß 96] K. Dreßler; B. Gründer; M. Hack, V. B. Köttgen:
Extrapolation of Rainflow Matrices
SAE, Detroit, 1996

[FKM 03] B. Hänel, E. Haibach, T. Seeger, G. Wirthgen und H. Zenner:
Rechnerischer Festigkeitsnachweis für Maschinenbauteile
5. Auflage, VDMA-Verlag, Frankfurt, 2003

[Gude 99] H. Gudehus, H. Zenner:
Leitfaden für die Betriebsfestigkeitsrechnung
4. Auflage, Verlag Stahleisen, Düsseldorf, 1999

[Gumb 58] E. J. Gumbel:
Statistics of Extremes
Columbia University Press, New York, 1958

[Haib 06] E. Haibach:
Betriebsfestigkeit: Verfahren und Daten zur Bauteilberechnung
2. Auflage, Berlin, Springer Verlag, 2002

[Hank 70] M. Hanke:
Eine Methode zur Beschreibung der Betriebslastkollektive als Grundlage für Betriebsfestigkeitsversuche
ATZ 72, Heft 3, 1970

[Hück 88] M. Hück, J. Bergmann, W. Schütz
Relative Miner-Regel
Gemeinschaftsarbeit PKW-Industrie / IABG, IABG-Bericht TF 2022, Teil I, 1988

[Köhl 11] M. Köhler, S. Jenne, K. Pötter, H. Zenner
Zählverfahren und Lastannahme in der Betriebsfestigkeit
Springer-Verlag, Berlin, 2011

[Krüg 85] W. Krüger; J. Petersen:
Simulation und Extrapolation von Rainflow-Matrizen
Kaiserslautern : Universität Kaiserslautern, 1985

[Schü 90] D. Schütz, H. Klätschke, H. Steinhilber, P. Heuler, W. Schütz:
Standardisierte Lastabläufe für Bauteile von PKW Radaufhängungen
LBF-Bericht Nr. FB-191, 1990

[Silv 84] B. W. Silverman
Density Estimation for Statistics and Data Analysis
Crc Pr Inc; 2. Auflage, 1986